Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби

Тезисы докладов II Международного семинара, посвященного 70-летию со дня рождения академика А. И. Субботина

CGS 2015

Abstracts of II International Seminar dedicated to the 70th Anniversary of Academician A. I. Subbotin

Control Theory and Theory of Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations

Control Theory and Theory of Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations CGS'2015

Abstracts of II International Seminar dedicated
to the 70th Anniversary of Academician A. I. Subbotin

Ekaterinburg, Russia
April 1–3, 2015

Ekaterinburg
2015

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. Н. КРАСОВСКОГО

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби

Тезисы докладов II Международного семинара,
посвященного 70-летию со дня рождения
академика А. И. Субботина

Екатеринбург, Россия
1–3 апреля 2015 г.

Екатеринбург
ИММ УрО РАН · УРФУ
2015

УДК 517.9 + 519.63
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

Конференция проводится при финансовой поддержке УрФУ и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-20107-Г)

Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби: Тез. докл. II Междунар. семинара, посвященного 70-летию со дня рождения акад. А. И. Субботина. Екатеринбург, Россия, 1–3 апреля 2015 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УрФУ. 2015. 171 с.

В сборнике анонсируются результаты исследований по теории устойчивости, математической теории управления и оценивания, теории обобщенные решений уравнений Гамильтона – Якоби. Представлены следующие научные направления: обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби, управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, задачи оценивания и идентификации в динамических системах, обратные задачи и управляемые распределенные системы, численные алгоритмы решения задач оптимального управления и краевых задач для уравнений Гамильтона–Якоби.

УДК 517.9 + 519.63
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

ISBN 978-5-8295-0339-0

Субботин Андрей Измайлович
16.02.1945–14.10.1997

Программа работы конференции

Среда 1 апреля

9:00 — 9:30
Регистрация участников (актовый зал ИММ)
9:30 — 10:00
Открытие конференции (актовый зал ИММ)

Пленарные доклады (актовый зал ИММ)

Сессия 1. Председатель — Ушаков В. Н.

10:00 — 10:45
Ледяев Ю. С., Кипка Р. Динамическая оптимизация на бесконечномерных многообразиях
Видеоконференция
10:45 — 11:30
Куржанский А. Б., Точилин П. А. О применении принципа сравнения для построения невыпуклых оценок множеств достижимости кусочно–линейных систем

11:30 — 12:00 **Кофе–брейк**

Сессия 2. Председатель — Тарасьев А. М.

12:00 — 12:45
Bardi M., Cesaroni A., Ghilli D., Scotti A. Viscosity methods for multiscale financial models with stochastic volatility
Видеоконференция
12:45 — 13:30
Falcone M., Sahu S., Bokanowski O. An efficient filtered scheme for some first order Hamilton–Jacobi–Bellman equations
Видеоконференция

13:30 — 15:00 **Обед**

15:00 — 19:00 **Заседания секций**

Четверг 2 апреля

Сессия 3. Председатель — Ченцов А. Г.

10:00 — 10:45
Петросян Л. А. Сильно–динамически устойчивые решения в динамических кооперативных играх
10:45 — 11:30
Половинкин Е. С. Задачи на экстремум и дифференциальные включения с неограниченной правой частью

11:30 — 12:00 **Кофе–брейк**

Сессия 4. Председатель — Петросян Л. А.

12:00 — 12:45
Жуковский В. И., Горбатов А. С. Связь золотого правила с равновесием по Бержу
12:45 — 13:30
Дыхта В. А. Weakly Monotone Solutions of the Hamilton–Jacobi Inequality and Feedback Minimum Principle

13:30 — 15:00 **Обед**

15:00 — 19:00 **Заседания секций**

Пятница 3 апреля

Сессия 5. Председатель — Субботина Н. Н.

10:00 — 10:45
Овсеевич А. И., Федоров А. К. Успокоение системы осцилляторов с помощью обобщенного сухого трения
10:45 — 11:30
Ченцов А. Г. Топологические свойства множеств притяжения в абстрактных задачах о достижимости

11:30 — 12:00 **Кофе–брейк**

12:00 — 12:45
Хенкин Г. М., Шананин А. А. Проблема Коши–Гельфанда и обратная задача для квазилинейного уравнения первого порядка
12:45 — 13:30
Мазалов В. В., Реттиева А. Н. Условия, стимулирующие кооперацию, в задачах природопользования

13:30 — 15:00 **Обед**

15:00 — 16:00 **Заседания секций**

16:00 — 16:30 **Закрытие конференции**

**Секция «Оптимальное управление
и дифференциальные игры»
(аудитория 203, новый корпус).
Председатель секции Лукоянов Н. Ю.**

Среда 1 апреля

**Сессия «Оптимальное управление и дифференциальные игры–1».
01.04. 15:00 — 16:40.**

Председатель — Хлопин Д. В.

15:00 — 15:25
Авербух Ю. В. Экстремальный сдвиг в задачах управления процессами Леви
15:25 — 15:50
Гасников А. В., Двуреченский П. Е., Камзолов Д. И. Универсальные градиентные методы в гильбертовом пространстве
15:50 — 16:15
Данилин А. Р., Коврижных О. О. Асимптотика оптимального времени в сингулярно возмущенной задаче быстродействия
16:15 — 16:40
Лахтин А. С. Аналитическое решение задачи аппроксимации выпуклых множеств

Кофе–брейк. 16:40 — 17:00.

**Сессия «Оптимальное управление и дифференциальные игры–2».
01.04. 17:00 — 18:40.**

Председатель — Данилин А. Р.

17:00 — 17:25
Андреева И. Ю., Сесекин А. Н. Вырожденная линейно-квадратичная задача для системы с линейным и постоянным запаздываниями
17:25 — 17:50
Ушаков В. Н., Лавров Н. Г., Ушаков А. В., Паршиков Г. В. О решении задач сближения нелинейных управляемых систем с компактной

целью в фиксированный момент времени
17:50 — 18:15
Хлопин Д. В. О невырожденности принципа максимума в задачах управления на бесконечном промежутке с липшицевой функцией цены
18:15 — 18:40
Юферева О. О. Игра простого преследования на компакте

Четверг 2 апреля

Сессия «Оптимальное управление и дифференциальные игры–3».
02.04. 15:00 — 16:40.

Председатель — Ухоботов В. И.

15:00 — 15:25
Горбатов А. С. Нулевой риск в однокритериальной задаче при неопределенности
15:25 — 15:50
Жуковский В. И., Горбатов А. С. Связь золотого правила с равновесием по Бержу
15:50 — 16:15
Клейменов А. Ф. Кооперативные решения в неантагонистических позиционных дифференциальных играх многих лиц
16:15 — 16:40
Лукоянов Н. Ю., Корнев Д. В. К задаче динамической оптимизации гарантии при геометрических и интегральных ограничениях на возможности управления

Кофе–брейк. 16:40 — 17:00.

Сессия «Оптимальное управление и дифференциальные игры–4».
02.04. 17:00 — 18:40.

Председатель — Жуковский В. И.

17:00 — 17:25
Ушаков В. Н., Малев А. Г. Об одной оценке дефекта стабильности множеств в игровой задаче о сближении
17:25 — 17:50
Петров Н. Н., Соловьева Н. А. О задаче преследования с фазовыми ограничениями в рекуррентных дифференциальных играх
17:50 — 18:15
Ухоботов В. И., Изместьев И. В. Об одной задаче импульсного управления при наличии помехи
18:15 — 18:40
Шориков А. Ф. Дискретная динамическая модель двухуровневого минимаксного программного управления экономической безопасностью региона

Пятница 3 апреля

Сессия «Оптимальное управление и дифференциальные игры–5».
03.04. 15:00 — 17:05.

Председатель — Лукоянов Н. Ю.

15:00 — 15:25
Плаксин А. Р., Лукоянов Н. Ю. О дифференциальных играх для систем нейтрального типа
15:25 — 15:50
Старицын М. В., Сорокин С. П. Feedback Necessary Optimality Condition for Impulsive Control Problems
15:50 — 16:15
Родина Л. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами
16:15 — 16:40
Самсонюк О. Н. Вариационный принцип максимума для задачи оптимального управления с траекториями ограниченной вариации

16:40 — 17:05
Сумин М. И. Регуляризованный принцип максимума Понтрягина как инструмент для решения неустойчивых задач оптимального управления

Секция «Уравнения Гамильтона–Якоби»
(актовый зал ИММ)
Председатель секции Тарасьев А. М.

Среда 1 апреля

Сессия «Уравнения Гамильтона–Якоби–1».
01.04. 15:00 — 16:40.

Председатель — Филиппова Т.Ф.

15:00 — 15:25
Carlini E., Silva F. J. A Semi–Lagrangian Scheme for Second Order Mean Field Game Problems
Видеоконференция
15:25 — 15:50
Cacace S., Falcone M. A domain decomposition method for second order Hamilton–Jacobi equations
Видеоконференция
15:50 — 16:15
Филиппова Т. Ф. Задача гарантированного управления трубкой траекторий нелинейной системы с неопределенностью
16:15 — 16:40
Лебедев П. Д., Успенский А. А. Построение сингулярных кривых в задаче Дирихле для уравнения типа эйконала в случае невыпуклого краевого множества

Кофе–брейк. 16:40 — 17:00.

Сессия «Уравнения Гамильтона–Якоби–2».
01.04. 17:00 — 18:40.

Председатель — Максимов В. И.

17:00 — 17:25
Максимов В. И. Об устойчивом управлении системой уравнений фазового поля при полной и неполной информации
17:25 — 17:50
Тарасьев А. М., Кряжимский А. В. Мультиуровневая оптимизация в моделях пропорционального экономического роста

17:50 — 18:15
Орлов С. М., Киселев Ю. Н., Орлов М. В. Задача Рамсея: три подхода к решению
18:15 — 18:40
Токманцев Т. Б., Крупенников Е. А. Сходимость решения задачи реконструкции динамики макроэкономической модели

Четверг 2 апреля

Сессия «Уравнения Гамильтона–Якоби–3». 02.04. 15:00 — 16:40.

Председатель — Гусев М. И.

15:00 — 15:25
Гусев М. И. Внешние аппроксимации трубок траекторий для некоторых классов управляемых систем с фазовыми ограничениями
15:25 — 15:50
Guseinov Kh. G., Huseyin N., Huseyin A. Approximation of the Set of Trajectories of the Control System with Integral Constraints on the Controls and Described by an Urysohn Type Integral Equation
15:50 — 16:15
Dzhafarov (Cafer) V., Büyükköroğlu T., Yılmaz Ş. On One Application of Convex Optimization to Stability Problems
16:15 — 16:40
Davydov A. A., Amer Fadhel Nassar On optimal state of exploited population with asymmetric intraspecific competition
Кофе–брейк. 16:40 — 17:00.

Сессия «Уравнения Гамильтона–Якоби–4». 02.04. 17:00 — 18:40.

Председатель — Ряшко Л.Б.

17:00 — 17:25
Ряшко Л. Б. Управление равновесием дискретной нелинейной стохастической системы при неполной информации
17:25 — 17:50

Долгий Ю. Ф. Обратная задача оптимальной стабилизации для автономных линейных систем дифференциальных уравнением с последействием
17:50 — 18:15
Ананьев Б. И. Оценивание нелинейных систем с ограничениями в виде обобщенной работы
18:15 — 18:40
Родин А. С. Структура и свойства решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

Пятница 3 апреля

Сессия «Уравнения Гамильтона–Якоби–5».
03.04. 15:00 — 17:30.

Председатель — Тарасьев А. М.

15:00 — 15:25
Усова А. А., Тарасьев А. М. Построение нелинейного регулятора при наличии комплексно–сопряженных пар собственных значений
15:25 — 15:50
Шагалова Л. Г., Субботина Н. Н. Построение обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби в модели молекулярной биологии
15:50 — 16:15
Гороховик В. В. Субдифференцируемость вещественных функций в смысле Демьянова–Рубинова
16:15 — 16:40
Григоренко Н. Л., Лукьянова Л. Н., Румянцев А. Е. К задаче нахождения гарантирующего программного управления при неполной информации
16:40 — 17:05
Чикрий А. А. Многозначные отображения и их селекторы в игровых задачах динамики
17:05 — 17:30
Turetsky V., Glizer V. Linear–Quadratic Pursuit–Evasion Game with Terminal Constraint for the Evader

Секция «Прикладные задачи управления и численные методы»
(читальный зал ИММ, аудитория 403, новый корпус)
Председатель секции Пацко В. С.

Среда 1 апреля

Сессия «Прикладные задачи управления и численные методы–1».
01.04. 15:00 — 16:40.

Председатель — Костоусов В. Б.

15:00 — 15:25
Кандоба И. Н., Костоусов В. Б., Костоусова Е. К., Козьмин И. В., Ложников А. Б., Починский В. И. Управление с поводырем в задаче выведения ракеты–носителя
15:25 — 15:50
Кругликов С.В. Задача априорной разработки оптимального алгоритма тестирования системы управления БПЛА
15:50 — 16:15
Кумков С. И., Овчинников М. М., Пятко С. Г. Управление потоками самолетов в трехвеерной схеме их слияния при наличии внеочередных самолетов
16:15 — 16:40
Самыловский И.А. Исследование оптимальных траекторий в упрощенной постановке задачи о максимизации высоты подъема материальной точки

Кофе–брейк. 16:40 — 17:00.

Сессия «Прикладные задачи управления и численные методы–2».
01.04. 17:00 — 18:40.

Председатель — Благодатских А. И.

17:00 — 17:25
Кувшинов Д. Р. Метод многогранников в задаче аппроксимации траекторий линейной управляемой системы при наличии фазовых огра-

ничений
17:25 — 17:50
Кумков С. С., Пацко В. С. Узкие шейки множеств разрешимости в модельных и практических задачах теории дифференциальных игр
17:50 — 18:15
Казаков А. Л., Лемперт А. А. К вопросу о дополнительном размещении логистических объектов на существующей сети
18:15 — 18:40
Благодатских А. И. Мягкое убегание жестко скоординированных объектов

Четверг 2 апреля

Сессия «Прикладные задачи управления и численные методы–3».
02.04. 15:00 — 16:40.

Председатель — Тимофеева Г. А.

15:00 — 15:25
Башкирцева И. А. Метод синтеза стохастической чувствительности в задаче управления газоразрядной системой
15:25 — 15:50
Рязанова Т. В., Ряшко Л. Б. Динамические режимы модели Калдора со случайным возмущением
15:50 — 16:15
Ким А. В., Иванов А. В., Квон Х. Д., Мурзин Р. И., Бочаров Г. А. Оптимальные алгоритмы управления ВИЧ моделью Callaway–Perelson
16:15 — 16:40
Завалищин Д. С., Тимофеева Г. А. Задача управления марковской цепью в условиях неполной информации

Кофе–брейк. 16:40 — 17:00.

Сессия «Прикладные задачи управления и численные методы–4».
02.04. 17:00 — 18:40.

Председатель — Пименов В. Г.

17:00 — 17:25
Азамов А. А., Бекимов М. А. О численном решении квадратичных систем дифференциальных уравнений
17:25 — 17:50
Егоров И. Е., Братусь А. С. Об одном численно–аналитическом методе построения синтеза оптимального управления на примере математической модели экономического роста под действием инвестиций в технологии
17:50 — 18:15
Кошкин Е. В. Стабилизация конечномерных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8
18:15 — 18:40
Пименов В. Г., Паначев М. А. Метод характеристик для уравнения в частных производных первого порядка с запаздыванием и одношаговые численные методы решения смешанных функционально–дифференциальных уравнений

Пятница 3 апреля

Сессия «Прикладные задачи управления и численные методы–5».
03.04. 15:00 — 17:05.

Председатель — Кандоба И. Н.

15:00 — 15:25
Кудрявцев К. Н., Стабулит И. С. Сильно гарантированный дележ в одной дифференциальной игре при неопределенности
15:25 — 15:50
Иванов А. Г. Оценка количества первичных РЛС, необходимого для однозначного определения их систематических ошибок
15:50 — 16:15
Федотов А. А. Раздельное оценивание геометрических ошибок и ошибок времени в замерах РЛС

Содержание

Contents

Экстремальный сдвиг в задачах управления процессами Леви

Ю.В. Авербух

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: ayv@imm.uran.ru

В работе рассматривается схема управления с поводырем, предложенная Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным в [1], для случая, когда движение исходной системы задается вероятностным процессом Леви, а движение поводыря описывается некоторым другим вероятностным процессом Леви. Впервые подобные постановки рассматривались в работе [2] для случая, когда исходная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, а поводырь — стохастическим дифференциальным уравнением. В работе рассматриваются задачи управления стохастическим процессом $X(t)$ на $\mathbb{R}^d$, для которого эволюцию математического ожидания можно описать уравнением

$$\frac{d}{dt}\Phi^i[t,s,u,v]\varphi(y) = \Phi^i[t,s,u,v](L_t[u(t),v(t)]\varphi)(y),$$
$$\Phi^i[s,s,u,v]\varphi(y) = \varphi(y).$$

Здесь $t \in [0,T]$, $u \in U$, $v \in V$ — управления первого и второго игроков соответственно, $\Phi^i[t,s,u,v]\varphi(y)$ — значение математического ожидания функции φ в момент времени t при условии того, что в момент времени s система находилась в положении y, $L_t[u,v]$ — оператор из $C^2_\infty(\mathbb{R}^d)$ в $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, называемый генератором. Предполагается, что цель первого/второго игрока — минимизировать/максимизировать $\mathbb{E}g(X(T))$. Также мы считаем, что U и V — компакты.

Предполагается, что движение исходной системы описывается генератором $L^1_t[u,v]$, движение поводыря — некоторым генератором $L^2_t[u,v]$. Пусть для управлений игроков u и v, начальной позиции (s,y) и момента t $X^i(t,s,y,u,v)$ — случайная величина, равная положению системы, соответствующей генератору L^i_t, в момент t. Пусть также функция $c_+ : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такова, что $c_+(T,x) = g(x)$, и для всех $(t_*,x_*)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $v_*\in V$, $t_+\in[t_*,T]$ существует управление первого игрока u такое, что $c_+(t_*,x_*) \geq \mathbb{E}_{t_*x_*}c_+(t_+,X^2(t_+,t_*,x_*,u,v_*))$. В работе предложена модификация метода экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина, и показано, что если $(\mathcal{X}^1[\cdot],\mathcal{X}^2[\cdot]) = \mathcal{Y}[\cdot,s,y,\Delta,v]$ — процесс на $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, построенный по схеме управления с поводырем и описывающий движение исходной системы и поводыря для начальной позиции (s,y) и с разбиением отрезка управления Δ, то

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup\{\mathbb{E}g(\mathcal{X}^1[T]) : (\mathcal{X}^1[\cdot],\mathcal{X}^2[\cdot]) = \mathcal{Y}[\cdot,s,z,\Delta,v], d(\Delta)\leq\delta\} \\ \leq c_+(s,z)+C,$$

где C — константа, определяемая генераторами L^1, L^2 и моментом времени T.

На основе общей теории показано, что для функция цены Val дифференциальной игры с динамикой

$$\dot{x} = f(t,x,u,v),\quad t\in[0,T],\quad x\in\mathbb{R}^d,\ u\in U,\quad v\in V$$

и функционалом платы $g(x(T))$ может быть приближена решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, если $f(t,x,u,v) = (f_1(t,x,u,v),\ldots,f_d(t,x,u,v))$, e^i — i-й базисный вектор, $\theta_i(t,x,u,v) = e^i\mathrm{sgn}f_i(t,x,u,v)$, $\eta^h_*(\cdot,x)$ для $x\in h\mathbb{Z}^d$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\eta^h_*(t,x) + \min_{\mu\in\mathrm{rpm}(U)}\max_{\nu\in\mathrm{rpm}(U)}\int_U\int_V\Big[\sum_{i=1}^d|f_i(t,x,u,v)| \\ \frac{1}{h}[\eta^h_*(t,x+h\theta_i(t,x,u,v)) - \eta^h_*(t,x)]\Big]\mu(du)\nu(dv) = 0,$$

то для $z\in h\mathbb{Z}^d$ справедливо неравенство $|\mathrm{Val}(s,z)-\eta^h_*(s,z)|\leq\Xi\sqrt{h}$, здесь Ξ — некоторая константа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-01-07909.

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[2] *Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.* Дифференциальная игра сближения–уклонения. Стохастический поводырь // Тр. ИММ УрО РАН, 2009. Т. 15, № 4, С. 146–166.

О численном решении квадратичных систем дифференциальных уравнений

А. А. Азамов, М. А. Бекимов

Ташкент, Узбекистан, Институт математики Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека

e-mail: abdulla.azamov@gmail.com, mansu@mail.ru

Рассматривается вопрос о приближенном решении задачи Коши для квадратичной системы

$$dx/dt = f(x),$$

где $f_i(x) = a_i^{jk} x_{jk} + b_i^j x_j + c_i$, $i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ d$. В большинстве случаев предпочитается одношаговый метод Рунге–Кутта, дающий численное решение с точностью h^s, $s = 2 \div 5$ (очень редко — порядка $s = 6$) на одном шаге. В принципе метод Рунге–Кутта применим для получения решения и с более высокой степенью точности, но на практике этого избегают, так как соответствующие формулы (уже для $s = 7$) становятся чрезмерно громоздкими. В связи с этим предлагается метод приближенного решения задачи Коши для квадратичных систем, основанный на формуле Тейлора

$$x(t+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{(k)}(t)}{k!} h^k + R_{n+1}(t,\ h). \tag{1}$$

Производные $x^{(k)}(t)$ выражаются через производные функции $f(x)$. В рассматриваемом случае величины $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ являются вектором, линейным отображением (задаваемым матрицей Якоби) и векторной квадратичной формой соответственно, причем $f''(x) = const$, а $f^{(k)}(x) = 0$ при $k \geq 3$. В дальнейшем эти выражения будем называть факторами и сокращенно будем писать в виде f, f',

f''. Выражение для $x^{(n)}$ через производные f будет состоять из одночленов, составленных из факторов f, f', f'', (их будем называть тейлоровыми слагаемыми).

Пусть числа D_n^k, где $n \geq 1,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]$ определены рекуррентными соотношениями

$$D_n^0 = 1,\ \ D_{n+1}^k = (n-2k+1)D_n^{k-1} + (n+1)D_n^k. \tag{2}$$

Легко установить, что $D_n^1 = 2^{n-1} - n$; кроме того, $2^{n-k} \leq D_n^k \leq 2^{n+k}$ при $n \geq 4$.

Теорема 1. *Выражение для $x^{(n)}$ является суммой групп Δ_n^k тейлоровых слагаемых, $k = 0, 1, ..., [(n-1)/2]$. При этом группа Δ_n^k содержит D_n^k слагаемых, каждое из которых состоит из k, $n-2k-1$ и $k+1$ факторов f'',f',f соответственно.*

Пусть решение $x(t)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(x)$, $x(0) = x_0$ существует на отрезке времен $[0,\ T]$ и удовлетворяет условию $x(t) \in K$, где T — заданное положительное число, K — заданное компактное множество в $\mathbb{R}^d$. Положим

$$M_0 = \max_{x\in K}|f(x)|\,,\ \ M_1 = \max_{x\in K}\|f'(x)\|\,,\ \ M_2 = \|f''(x)\| = const$$

(нормы матрицы и квадратичной формы – евклидовы: $\|f'(x)\| = \max\limits_{|u|\leq 1}|f'(x)u|\,,\ \|f''(x)\| = \max\limits_{|u|\leq 1,|v|\leq 1,} f''(x)[u,v])$. Поэтому

$$|f'u| \leq M_1\,|u|\,,\ \ |f''[u,\ v]| \leq M_2\,|u|\,|v|\,.$$

Теорема 2. *Для остаточного члена формулы Тейлора для решения задачи Коши квадратичных систем имеет место оценка*

$$|R_{n+1}| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\sum_k D_{n+1}^k M_0^k M_1^{n-2k} M_2^k,\ \ k = 0,\ 1,\ ...,\ [(n-1)/2].$$

Работа выполнена при поддержке фундаментального проекта РУз, проект №Ф4-ФА-Ф014.

Оценивание нелинейных систем с ограничениями в виде обобщенной работы

Б. И. Ананьев

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: abi@imm.uran.ru

Пусть задана нелинейная система вида

$$\dot{x} = f(t, x, v), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор системы, не доступный для измерения, $v \in R^p$ — неопределенное детерминированное возмущение. По ходу процесса измеряется вектор

$$y = g(t, x) + w, \quad y \in R^m, \tag{2}$$

где возмущение $w(\cdot)$ вместе с начальным состоянием x_0 и возмущением $v(\cdot)$ из (1) стеснены ограничением

$$F(x_0) + \int_0^T f_0(t, v, w)dt \leqslant 1. \tag{3}$$

Для существования и продолжимости решений уравнения (1) примем стандартные условия:

$$\|f(t, x_1, v) - f(t, x_2, v)\| \leqslant \lambda \|x_1 - x_2\|,$$
$$\|f(t, x, v)\| \leqslant \varkappa(1 + \|x\| + \|v\|), \quad x \in R^n, \ v \in R^p,$$

где λ, $\varkappa$ — константы, $\| \cdot \|$ — евклидова норма.

Определение 1. *Информационным множеством* $\mathbf{V}(t, y)$ системы (1), (2) называется совокупность всех векторов $\{x(t)\}$, для которых найдется тройка $(x_0, v(\cdot), w(\cdot))$ такая, что выход уравнения (2) на отрезке $[0, t]$ почти всюду совпадает с измеренным сигналом $y^t(\cdot)$, и выполняются ограничения (3).

Основная рассматриваемая задача состоит в определении множества $\mathbf{V}(t, y)$. Один из методов решения использует динамическое программирование [1]. Введем функцию Беллмана

$$V(t, x) = \min_{v(\cdot)} J(t, x, v),$$

где функционал J определяется формулой

$$J(t,x,v) = F(x_0) + \int_0^t f_0(\tau, v, y(\tau) - g(\tau, x))d\tau, \quad x(t) = x.$$

Уравнение Беллмана для $V(t,x)$ имеет следующий вид:

$$V_t = \min_v \left\{ -f'(t,x,v)V_x + f_0(t,v,y(t) - g(t,x)) \right\}, \ V(0,x) = F(x), \quad (4)$$

где символ $'$ означает транспонирование. Если решение уравнения (4) найдено, то имеем $\mathbf{V}(t,y) = \{x : V(t,x) \leqslant 1\}$. Для решения уравнения можно использовать любые разработанные методы. В частном случае, когда $f(t,x,v) = f(t,x) + B(t)v$, $f_0(t,v,w) = f_0(t,w) + v'Q(t)v$, имеем

$$V_t = -f'(t,x)V_x + f_0(t,y(t) - g(t,x)) - V_x'BQ^{-1}B'V_x/4, \quad (5)$$

$$V(0,x) = F(x), \quad v_0(t,x) = Q^{-1}B'V_x/2.$$

В уравнении (5) нет минимизации, но присутствует нелинейное слагаемое. Рассмотрим вместо (3) ограничение

$$F(x_0) + \int_0^T \left\{ f_0(t,w) + v'(t)Q(t)v(t) + v_0'(t)Q(t)v_0(t) \right\} dt \leqslant 1, \quad (6)$$

и линейное уравнение Ляпунова

$$\mathcal{V}_t = -f'(t,x)\mathcal{V}_x + f_0(t,y(t) - g(t,x)), \ \mathcal{V}(0,x) = F(x), \quad (7)$$

$$v_0(t,x) = Q^{-1}B'\mathcal{V}_x/2.$$

С уравнениями (6) и (7) свяжем множество $\mathbb{V}(t,y) = \{x : \mathcal{V}(t,x) \leqslant 1\}$. В настоящей работе на примерах изучается соотношение между множествами $\mathbb{V}(t,y)$ и $\mathbf{V}(t,y)$. Начинается сравнение с линейного случая, когда уравнения (5) и (6) допускают точное решение. Уравнение (7) существенно проще (5) и может быть решено стандартными методами. Левую часть ограничения (6) иногда называют обобщенной работой [2]. Величина $\mathcal{V}(T, x(T))$ — это минимум левой части из (6).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-01-00120.

[1] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory and Appl. 2002. Vol. 108. Pp. 227-251.

[2] *Красовский А.А.* Неклассические целевые функционалы и проблемы оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. №1. С. 3-11.

Вырожденная линейно–квадратичная задача для системы с линейным и постоянным запаздываниями

И. Ю. Андреева, А. Н. Сесекин

Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

e-mail: i.y.andreeva@ustu.ru, sesekin@list.ru

Пусть объект управления описывается линейной системой с линейным и постоянным запаздываниями

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_\mu(t)x(\mu t) + A_\tau(t)x(t-\tau)+$$

$$+\int_\mu^1 G(t,s)x(st)\,ds + \int_{-\tau}^0 D(t,s)x(t+s)\,ds + B(t)\dot{v}(t). \qquad (1)$$

Начальное условие имеет вид

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t \in [\mu t_0, t_0].$$

Здесь $A(t)$, $A_\mu(t)$, $A_\tau(t)$, $B(t)$ — матрицы соответственно размерностей $n\times n$, $n\times n$, $n\times n$, $n\times m$, причем компоненты трех первых матриц - непрерывные функции, а компоненты последней матрицы являются дифференцируемыми функциями, $x \in R^n$, $\varphi \in R^n$, $v \in R^m$, $0 < \mu < 1$, $t_0 > 0, t_0(1-\mu) \geq \tau$. Для определенности будем полагать, что $v(t_0) = 0$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[v(\cdot)] = x^T(t_f)Sx(t_f) + \int\limits_{t_0}^{t_f} x^T(t)Q(t)x(t)\,dt \qquad (2)$$

вдоль траекторий системы (1). В (2) S, $Q(t)$ — симметричные неотрицательно определенные матрицы, $t \in [t_0, t_f]$, элементы матрицы $Q(t)$ — непрерывные функции, размерность этих матриц — $n \times n$.

Данная задача является вырожденной [1] и в классе абсолютно непрерывных функций решения не имеет. Для построения оптимального решения осуществим расширение задачи путем введения импульсных управлений. Далее будем полагать, что $v(t)$, а следовательно, и $x(t)$ — функции ограниченной вариации, производные которых понимаются в обобщенном смысле [2]. Начальную функцию $\varphi(t)$ также будем считать функцией ограниченной вариации.

Для этой задачи получены достаточные условия, обеспечивающие существование ее решения, исследована структура оптимального управления, получены уравнения, описывающие коэффициенты перед фазовыми переменными и интенсивности импульсных составляющих, которые определяют вид оптимального управления. Другие постановки вырожденных линейно-квадратичных задач для систем с постоянным запаздыванием рассматривались в [3–5], а с линейным запаздыванием в [6].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-01-00304.

[1] *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.

[2] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

[3] *Андреева И.Ю., Сесекин А.Н.* Вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации с запаздыванием по времени // АиТ. 1997. № 7. С. 43–54.

[4] *Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В.* О порядке сингулярности импульсного оптимального управления в вырожденной линейно-квадратичной задаче оптимизации с последействием// АиТ. 2009.№ 4. С. 31–40.

[5] *Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н* Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последействием// АиТ. 2013. № 11. С. 39–48.

[6] *Sesekin A.N.* Singular linear-quadratic control problem for systems with linear delay// American Institute of Physics. Conference Proceeding. vol. 1570. 2013. P. 268-275.

Метод синтеза стохастической чувствительности в задаче управления газоразрядной системой

И. А. Башкирцева
Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
e-mail: irina.bashkirtseva@urfu.ru

Многие инженерные конструкции и технологические процессы моделируются динамическими системами. При этом требуемые рабочие режимы обычно связаны с равновесиями соответствующих моделей. Устойчивость равновесия здесь является необходимым условием надежного функционирования. Однако в некоторых случаях устойчивость равновесия соответствующей детерминированной динамической модели оказывается недостаточной. Под действием случайных возмущений траектория системы, покидая устойчивое равновесие, формирует стохастические осцилляции. При этом амплитуда вызываемых шумом случайных колебаний может оказаться достаточно большой, недопустимой с инженерной точки зрения.

В этих обстоятельствах, наряду с традиционным требованием обеспечения детерминированной устойчивости равновесия, важной дополнительной задачей становится анализ стохастической чувствительности этого равновесия.

В докладе рассматривается общий подход, связанный с введением функции стохастической чувствительности [1, 2] и методами ее анализа. Обсуждаются основные теоретические конструкции по синтезу наперед заданной функции стохастической чувствительности равновесий управляемых нелинейных систем. Рассматриваются условия полной управляемости и достижимости, приводятся алгоритмы построения регуляторов, обеспечивающих требуемую чувствительность.

Характерным примером, иллюстрирующим основные конструкции теории синтеза стохастической чувствительности, является задача стабилизации рабочего режима газоразрядной системы [3] в присутствии случайных возмущений. В отсутствие управления, даже малые случайные возмущения, несмотря на устойчивость равновесия, приводят к генерации колебаний недопустимо большой амплитуды. Причиной такой реакции системы на возмущения является чрезвычайно высокая стохастическая чувствительность ее равновесия. Наш подход состоит в построении регулятора, снижающего эту чувствительность.

Для управляемой газоразрядной системы в явном виде получены условия достижимости и найдены коэффициенты регулятора, синтезирующего заданную чувствительность. Показано, что благодаря снижению чувствительности удается вернуть систему в рабочий режим с допустимыми малоамплитудными осцилляциями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-08-00069

[1] *Башкирцева И.А., Перевалова Т.В.* Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя - цикл // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 53–69.

[2] *Bashkirtseva I.* Attainability analysis in the stochastic sensitivity control // International Journal of Control. 2015. V. 88. P. 276–284.

[3] *Астров Ю.А., Гузенко П.Ю., Фрадков А.Л.* Управление шумоиндуцированным переходом в нелинейной динамической системе // Управление в физико-технических системах. Под ред. А. Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2004.

Мягкое убегание жестко скоординированных объектов

А. И. Благодатских
Ижевск, Удмуртский государственный университет
e-mail: aiblag@mail.ru

Рассматривается задача преследования группы убегающих группой преследователей, при этом маневренность убегающих выше. Предполагается, что все убегающие используют одинаковое (жестко скоординированное) управление, которое формируется в каждый момент времени с учетом текущих позиций участников. Построено кусочно–постоянное управление, обеспечивающее мягкое убегание (то есть несовпадение геометрических координат, скоростей, ускорений и так далее) от группы преследователей всех убегающих.

В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 1)$ и убегающих $E_1, \ldots, E_m$ $(m \geqslant 1)$ вида:

$$\begin{aligned} &P_i: \ x_i^{(n_i)} = f_i\left(x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(n_i-1)}, u_i, t\right), \ u_i \in U_i, \quad x_i^{(\alpha_i)}(t_0) = X_i^{\alpha_i}, \\ &E_j: \ y_j^{(m_j)} = v, \qquad\qquad\qquad\qquad \|v\| \leqslant \gamma, \ y_j^{(\beta_j)}(t_0) = Y_j^{\beta_j}, \\ &\qquad \text{причем } n_i > m_j \geqslant 1 \text{ и } X_i^{\beta_j} \neq Y_j^{\beta_j} \text{ для всех } i, j, \beta_j, \text{ где} \end{aligned}$$

$x_i, y_j, v \in \mathbb{R}^k$, $U_i \subset \mathbb{R}^{k_i} (k_i \geqslant 1)$, $f_i : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$,
$\gamma > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $\alpha_i = 0, \ldots, n_i - 1$, $\beta_j = 0, \ldots, m_j - 1$.

Управления игроков из класса измеримых по Лебегу функций, удовлетворяющие указанным геометрическим ограничениям, называем *допустимыми*.

Считаем, что каждая функция f_i удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решения на любой отрезок при всех допустимых управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i.

Определение. *В игре* Γ *возможно мягкое убегание*, если для любых допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i найдется такое допустимое управление $v(t) = v\left(t, \ x_i^{(\alpha_i)}(t), \ y_j^{(\beta_j)}(t)\right)$ убегающих E_j, что $x_i^{(\beta_j)}(t) \neq y_j^{(\beta_j)}(t)$ для всех $i, j, \beta_j, t \in [t_0, \infty)$.

Теорема. *Если существует такая постоянная* G, *что* $\left|f_i(a_{\alpha_i}, b, t)\right| \leqslant G$ *при всех* $(a_{\alpha_i}, b, t) \in \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty)$, *то в игре* Γ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

Пример. В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ на $[t_0, \infty)$ рассматривается игра Γ_1 102 лиц:

100 преследователей $P_1,\dots,P_{100}$ и 2 убегающих E_1, E_2 вида:

$$\begin{aligned}
P_i\colon\ & x_i^{(8)} = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 10,\\
& x_i(t_0) = X_i^0, \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \dots, x_i^{(7)}(t_0) = X_i^7,\\
& i = 1,\dots,50,\\
P_i\colon\ & x_i^{(6)} = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 10,\\
& x_i(t_0) = X_i^0, \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \dots, x_i^{(5)}(t_0) = X_i^5,\\
& i = 51,\dots,100,\\
E_1\colon\ & y_1^{(5)} = v, \quad \|v\| \leqslant 1,\\
& y_1(t_0) = Y_1^0, \dot{y}_1(t_0) = Y_1^1, \dots, y_1^{(4)}(t_0) = Y_1^4,\\
& \text{причем } Y_1^0 \neq X_i^0,\ Y_1^1 \neq X_i^1, \dots, Y_1^4 \neq X_i^4,\ i = 1,\dots,100,\\
E_2\colon\ & \ddot{y}_2 = v, \quad \|v\| \leqslant 1,\\
& y_2(t_0) = Y_2^0, \dot{y}_2(t_0) = Y_2^1,\\
& \text{причем } Y_2^0 \neq X_i^0,\ Y_2^1 \neq X_i^1,\ i = 1,\dots,100.
\end{aligned}$$

Утверждение. *В игре* Γ_1 *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций, то есть* $y_1(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}_1(t) \neq \dot{x}_i(t)$, $\ddot{y}_1(t) \neq \ddot{x}_i(t)$, $y_1^{(3)}(t) \neq x_i^{(3)}(t)$, $y_1^{(4)}(t) \neq x_i^{(4)}(t)$ *и* $y_2(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}_2(t) \neq \dot{x}_i(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, $i = 1,\dots,100$.

[1] *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009.

[2] *Благодатских А.И.* Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 6. С. 143–149.

[3] *Благодатских А.И.* О мягком убегании группы скоординированных убегающих // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. Вып. 6. С. 993–1002.

[4] *Благодатских А.И.* Мягкое убегание жестко скоординированных убегающих в нелинейной задаче группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 4. С. 3–17.

Универсальные градиентные методы в гильбертовом пространстве

А. В. Гасников, П. Е. Двуреченский, Д. И. Камзолов

Долгопрудный, Московский физико-технический институт

Рассматривается задача выпуклой оптимизации в гильбертовом пространстве

$$f(x) \to \min_{x \in Q}.$$

Норму (евклидову), порожденную скалярным произведение, будем обозначать 2-нормой. Относительно множества Q предполагается, что оно может быть вложено в шар (в 2-норме) конечного радиуса в этом пространстве. Функция $f(x)$ предполагается μ_2-сильно выпуклой в 2-норме. Далее будем считать, что в гильбертовом пространстве задана такая норма $\| \ \|$, что единичный шар в этой норме содержится внутри единичного шара в 2-норме. Считаем также, что задана прокс–структура относительно этой нормы. Прокс–диаметр множества Q считаем равным R. Мы будем добавлять нижний индекс 2, если прокс–структура предполагается евклидовой.

Предложение. (δ, L)*-оракул выдает (на наш запрос, в котором указывается только одна точка x) на каждой итерации такое* $(f_\delta(x), G(x))$*, что для любых $y \in Q$*

$$0 \le f(y) - f_\delta(x) - \langle G(x), y - x \rangle \le \frac{L}{2} \|y - x\|^2 + \delta.$$

Имея в распоряжении такого оракула, нужно предложить оптимальный метод. По определению это метод, для которого для данного класса задач в соотношении

$$f(x_N) - \min_{x \in Q} f(x) \le \varepsilon,$$

$N(\varepsilon)$ — минимально. Если $\delta = 0$, то ответ известен (здесь и далее вместо O () можно писать точные константы $\sim 1 - 10$)

$$N(\varepsilon) = \min\left\{ \mathrm{O}\left(\sqrt{\frac{LR^2}{\varepsilon}}\right), \mathrm{O}\left(\sqrt{\frac{L_2}{\mu_2}} \ln\left(\frac{L_2 R_2^2}{\varepsilon}\right)\right)\right\}.$$

Выписанная оценка достигается и неулучшаема (с точностью до логарифмического фактора). Здесь и далее мы считаем, что $N(\varepsilon)$ меньше размерности гильбертова пространства, в котором происходит оптимизация (в случае если это конечномерное евклидово пространство).

Если $\delta > 0$ достаточно мало, то можно предложить параметрическое семейство методов ($p \in [0,1]$), которые работают по оценкам

$$N(\varepsilon) = \mathrm{O}\left(\left(\frac{LR^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right), \quad \delta \le \mathrm{O}\left(\varepsilon/, N(\varepsilon)^p\right) \tag{1}$$

$$N(\varepsilon) = \mathrm{O}\left(\left(\frac{L_2}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{p+1}} \ln\left(\frac{L_2 R_2^2}{\varepsilon}\right)\right), \delta \le \mathrm{O}\left(\varepsilon/N(\varepsilon)^p\right). \tag{2}$$

Выписанные оценки достигаются и также неулучшаемы для всех $p \in [0,1]$ (с точностью до логарифмического фактора).

Следуя Ю. Е. Нестерову, заметим, что за счет допускаемой неточности оракула, можно погрузить задачу с гельдеровым градиентом ($\nu \in [0,1]$) $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_* \le L_\nu \|x-y\|^\nu$ (в том числе и негладкую задачу с ограниченной нормой разности субградиентов при $\nu = 0$) в класс гладких задач с оракулом, характеризующимся точностью δ и

$$L = L_\nu \left[\frac{L_\nu (1-\nu)}{2\delta (1+\nu)}\right]^{\frac{1-\nu}{1+\nu}}. \tag{3}$$

Используя это обстоятельство и идею универсальности на основе оценок (1), (2), (3), в данной работе предложено два семейства универсальных методов, работающих по оценкам

$$N(\varepsilon) = \mathrm{O}\left(\inf_{\nu\in[0,1]}\left(\frac{L_\nu R^{1+\nu}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{1+2p\nu+\nu}}\right), \quad \delta \le \mathrm{O}\left(\varepsilon/N(\varepsilon)^p\right),$$

$$N(\varepsilon) = \mathrm{O}\left(\inf_{\nu\in[0,1]} \frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}} \ln\left(\frac{L_{\nu,2} R_2^{1+\nu}}{\mu_2^{1-\nu}\varepsilon}\right)\left(\frac{L_{\nu,2}^{\frac{2}{1+\nu}}}{\mu_2}\right)^{\frac{1+\nu}{1+2p\nu+\nu}}\right), \delta \le \mathrm{O}\left(\frac{\varepsilon}{N(\varepsilon)^p}\right).$$

Нулевой риск в однокритериальной задаче при неопределенности

А. С. Горбатов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
e-mail: gorbatovanton@gmail.com

В окружающей нас жизни часто происходят конфликтные ситуации, в которых необходимо принимать решения. Зачастую последствия этих решений до конца не ясны, ибо возникает так называемая неопределенность. Как действовать в такой ситуации? Существует несколько подходов к формализации оптимального решения конфликтов при неопределенности. Предложенный в 1951 году американским математиком Леонардом Сэвиджем принцип минимаксного сожаления, наряду с принципом максимина, играют важную роль при принятии гарантированных решений в однокритериальной задаче при неопределенности. В нем используется *функция риска по Сэвиджу*

$$\Phi(x,y) = \max_{z\in X} f(z,y) - f(x,y),$$

значение которой определяет уровень риска, которым сопровождается выбранная лицом, принимающим решение (ЛПР), стратегия. ЛПР стремится ее максимально уменьшить.

В данном сообщении при «обычных» для математической теории игр условиях (критерий $f(x,y)$ непрерывен на декартовом произведении компактных множеств стратегий X и неопределенностей Y) доказаны необходимые и достаточные условия существования стратегии, обеспечивающей нулевой риск. Оказывается, что такая стратегия существует тогда и только тогда, когда функция риска по Сэвиджу обладает седловой точкой (x^0, y^0), т.е.

$$\min_{x\in X} \Phi(x,y^0) = \Phi(x^0,y^0) = \max_{y\in Y} \Phi(x^0,y).$$

Вводится также смешанное расширение задачи

$$< X, Y, \Phi(x,y) >,$$

для которого при указанных выше предположениях установлено существование смешанной стратегии, которая гарантирует нулевое значение функции риска при любой реализации неопределенности $y \in Y$.

Однако не всегда принцип минимаксного сожаления применим. Для иллюстрации этого факта в сообщении приводится класс линейно–квадратичных задач, для которых гарантированное значение функции риска $(\max\limits_{y \in Y} \Phi(x, y))$ не существует.

Субдифференцируемость вещественнозначных функций в смысле Демьянова–Рубинова

В. В. Гороховик

Минск, Институт математики НАН Беларуси

e-mail: gorokh@im.bas-net.by

При определении и исследовании минимаксных и вязкостных решений задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби используются (см. монографии [1–3]) такие средства анализа негладких функций, как нижние и верхние полупроизводные по направлениям, а также двойственные им объекты — субдифференциалы и супердифференциалы Фреше. Субдифференциалы Фреше имеют ряд недостатков, которые ограничивают их применение. Во-первых, достаточно часто оба, субдифференциал и супердифференциал Фреше, могут быть пустыми подмножествами. Например, это имеет место для функции $f(x_1, x_2) = |x_1| - |x_2|$ в нулевой точке. Во-вторых, даже в том случае, когда субдифференциал или супердифференциал Фреше является непустым (они оба являются одновременно непустыми только в случае, когда функция дифференцируема по Фреше в классическом смысле), восстановить по нему соответствующую полупроизводную по направлениям можно только в некоторых регулярных случаях, в частности, когда субдифференциал (супердифференциал) Фреше совпадает с субдифференциалом (супердифференциалом) Кларка.

В настоящем докладе для вещественнозначных функций вводятся понятия субдифференциалов и супердифференциалов Демьянова-Рубинова, обобщающие понятия субдифференциалов и супердифференциалов Фреше таким образом, что они являются подмножествами соответствующих понятий в смысле Демьянова-Рубинова. В основу определений новых понятий положена двойственность между положительно однородными функциями и исчерпывающими их семействами верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций, исследованию которой посвящены многие работы В.Ф. Демьянова и А.М. Рубинова и их последователей [4–6]. По существу эта двойственность является распространением классической двойственности Минковского на более широкие классы положительно однородных функций. Важной особенностью вводимых понятий является то, что субдифференциал и супердифференциал Демьянова-Рубинова лишен упомянутых выше недостатков, характерных для субдифференциалов и супердифференциалов Фреше. Так, для любых функций, у которых нижняя и верхняя полупроизводные в рассматриваемой точке являются конечными по всем направлениям, оба, и субдифференциал, и супердифференциал Демьянова-Рубинова, являются непустыми, в то время как субдифференциал и/или супердифференциал Фреше могут быть пустыми. Второй позитивной особенностью субдифференциалов и супердифференциалов Демьянова-Рубинова является то, что по ним всегда однозначно восстанавливаются двойственные им полупроизводные по направлениям.

В докладе будут представлены характерные для различных классов функций свойства субдифференциалов и супердифференциалов Демьянова-Рубинова, основные правила их исчисления, а также некоторые приложения к задачам оптимизации.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь (“Конвергенция – 1.4.03”).

[1] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991.

[2] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2003.

[3] *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013.

[4] *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

[5] *Demyanov V.F., Rubinov A.M. (eds.)* Quasidifferentiability and Related Topics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2000.

[6] *Гороховик В.В., Старовойтова М.А.* Характеристические свойства прямых экзостеров различных классов положительно однородных функций. Труды Института математики (НАН Беларуси). 2011. Т. 19, № 2. С. 12–25.

К задаче нахождения гарантирующего программного управления при неполной информации

Н. Л. Григоренко, Л. Н. Лукьянова, А. Е. Румянцев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: grigor@cs.msu.su

Рассматривается задача терминального управления линейной системой при неполной информации о параметрах процесса. Используется формализация процесса управления при неполной информации и теоремы существования решения задач управления из работ [1-3]. Предложены достаточные условия на управляемый процесс, при которых существует пакет программ [4], гарантирующий окончание процесса управления при неизвестной (произвольной) начальной позиции из множества начальных позиций в фиксированный момент времени. Управление найдено в классе гарантирующих пакетов программ [4,5] и опирается на полученные в этих работах теоремы существования гарантирующего пакета программ при неполной информации.

Пусть движение вектора $x \in R^n$ подчиняется системе уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) \in X_0,\ u \in P,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

где $X_0 \subset R^n$ — множество, состоящее из конечного числа точек $x_{01}, ...,\ x_{0N}$, $u(t) \in R^m$ — параметр управления, $u \in P \subset R^m$, P — компактное множество, A, B — постоянные $n \times n, n \times m$, соответственно, матрицы. Уравнение наблюдения имеет вид:

$$y(t) = C(t,t_1)x(t),\ C(t,t_1) = \{0:\ t \in [0,t_1) \cup (t_1,T);\ E:\ t = t_1,\ t = T\}. \tag{2}$$

где $0, E$ - постоянные $(n \times n)$ матрицы, 0 - матрица с нулевыми элементами, E - единичная матрица. Целью процесса управления является приведение вектора $x(t)$ в точку $x_1 \in R^n$. Управления $u(t,y(t))$ — измеримые по Лебегу функции от t. При выборе управляющего параметра $u(t)$ доступна информация об управляемой системе (1) , множествах X_0, M и P, векторах $x_1,\ y(t)$.

Задача построения гарантирующего программного управления при неполной информации включает: **а)** получение достаточных условий на управляемый процесс (1),(2) при которых существует допустимое управление, гарантирующее окончание процесса управления при неизвестной (произвольной) начальной позиции из множества X_0 в фиксированный момент времени T; **б)** описание алгоритма нахождения такого управления.

Пусть $Z(t,T,x_1) = e^{(t-T)A}x_1 + \int_t^T e^{(t-s)A}B(-P)ds,\ t < T$ - множество управляемости процесса (1) из точки $x_1,\ D(t_1) = -\int_0^{t_1} e^{(t_1-s)A}BPds$.

Теорема. *Если параметры управляемого процесса (1) $(A,\ B,\ X_0,\ P,$ $x_1,\ T)$ таковы, что существуют $t_1 \in [0,T]$ и вектор $\omega \in D(t_1)$ такие, что для всех $\psi \in E^n$ выполнено неравенство*

$$c\Big(conv\{x_{0i}, i = 1,...,N\} + e^{-t_1A}\omega, \psi\Big) \le c\Big(e^{-t_1A}Z(t_1,T,x_1), \psi\Big), \tag{3}$$

то существует решение задачи построения гарантирующего пакета программ в момент T для системы (1) и матрице наблюдения $C(t,t_1)$ (2).

Здесь $c(F,\psi) = \sup_{f \in F}(f,\psi)$ - опорная функция множества F, (f,ψ) - скалярное произведение векторов f и ψ.

Приводятся расчеты гарантирующего пакета программ для контрольного примера Понтрягина [3] с фазовым вектором в R^n и геометрическими ограничениями на управление.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект №14-11-00539

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. Наука. 1974.

[2] *Субботин А.И. Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. Наука. 1981.

[3] *Понтрягин Л.С.* Избранные труды. М. МАКС Пресс. 2004.

[4] *Осипов Ю.С.* Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // УМН, 2006, Т. 61, вып. 4(370),С. 25–76

[5] *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией, // Тр. ИММ УрО РАН, 2009, Т. 15, № 3.С. 139–157.

Внешние аппроксимации трубок траекторий для некоторых классов управляемых систем с фазовыми ограничениями

М. И. Гусев

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: gmi@imm.uran.ru

В работе предлагается метод приближенного построения трубок траекторий и множеств достижимости нелинейной управляемой системы

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U$ с фазовыми ограничениями, заданными в виде $x(t) \in S$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $U \subset \mathbb{R}^r$ – компакт, множество $S \subset \mathbb{R}^n$ – непустое множество, представимое следующим образом: $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leqslant 0\}$. Система (1) рассматривается при стандартных предположениях, обеспечивающих ограниченность ее траекторий. Далее через D будем обозначать компактное множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее все траектории системы (1) с заданным начальным условием. Функция $g(x)$ предполагается непрерывной на $\mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемой на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant g(x) \leqslant \sigma\}$ для некоторого $\sigma > 0$.

Рассматривается задача приближенного построения множества $X_0(\cdot)$, состоящего из всех траекторий системы (1), удовлетворяющих фазовым ограничениям. Предлагаемый метод основан на замене исходной системы семейством управляемых систем без фазовых ограничений, зависящих от параметра $\varepsilon > 0$

$$\dot{x} = f_\varepsilon(x, u(t)),\ x(t_0) = x^0,\ u(t) \in U,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{2}$$

трубки траекторий которых $X_\varepsilon(\cdot)$ аппроксимируют $X_0(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$.

Правая часть вспомогательной системы (2) выбирается следующим образом

$$f_\varepsilon(x,u) = \begin{cases} h_\varepsilon(g(x))f(x,u) + (1 - h_\varepsilon(g(x)))f(x,\bar{u}(x)) & \text{при} \quad g(x) > 0, \\ f(x,u) & \text{при} \quad g(x) \leq 0, \end{cases}$$

Здесь $h_\varepsilon(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция такая, что $0 \leq h_\varepsilon(\tau) \leq 1$, $h_\varepsilon(\tau) = 1$ при $\tau < 0$, $h_\varepsilon(\tau) = 0$ при $\tau > \varepsilon$. Постулируется существование $\sigma > 0$ и функции $\bar{u} : S^\sigma \to U$, $S^\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq g(x) \leq \sigma\} \cap D$ таких, что

$$(\nabla g(x), f(x, \bar{u}(x))) < 0, \quad \forall x \in S^\sigma,$$

и функция $f(x, \bar{u}(x))$ липшицева на S^σ.

При указанных условиях справедливо следующее [1]:

1) функция $f_\varepsilon(x,u)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x на $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \sigma\} \cap D$ при достаточно малых ε;

2) траектории системы (2) остаются в области $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \sigma\} \cap D$ при любых $t \in [t_0, t_1]$;

3) имеет место включение $X_\varepsilon(\cdot) \subset X_0(\cdot)$, $\varepsilon > 0$;

4) существует $L > 0$ такое, что $h(X_\varepsilon(\cdot), X_0(\cdot)) \leq L\varepsilon$, где h– хаусдорфово расстояние между трубками траекторий.

Рассмотрены линейные по управлению системы

$$\dot{x} = f(x,u) = f_1(x) + f_2(x)u,\ u(t) \in U,\ x(t_0) = x^0,$$

с фазовыми ограничениями общего вида и с ограничениями на управление заданными невырожденным эллипсоидом в $\mathbb{R}^n$: $U = \{u \in \mathbb{R}^r : (u - \hat{u})^\top Q(u - \hat{u}) \leq 1\}$, Q – положительно определенная симметричная матрица, $\hat{u} \in \mathbb{R}^r$ – центр эллипсоида. Показано, что выполнение неравенства

$$\min_{u \in U}(\nabla g(x), f_1(x) + f_2(x)u) < 0, \quad \forall x \in S^\sigma,$$

влечет существование функции $\bar{u}(x)$ с указанными выше свойствами и описан алгоритм ее построения.

Рассмотрены примеры, приведены результаты численного моделирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-01-05950.

[1] *Гусев М. И.* О снятии фазовых ограничений при построении множеств достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. т. 20, № 4 С. 106–115.

Асимптотика оптимального времени в сингулярно возмущенной задаче быстродействия

А. Р. Данилин, **О. О. Коврижных**

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: dar@imm.uran.ru, koo@imm.uran.ru

Исследуется задача о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{12}y + A_{13}z, & x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m, \\ \varepsilon^2\dot{y} = A_{22}y + B_1u, & z \in \mathbb{R}^k, \\ \varepsilon^2\dot{z} = B_2u, & u \in \mathbb{R}^r,\ r \geqslant 2, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(T_\varepsilon) = y(T_\varepsilon) = z(T_\varepsilon) = 0,\ T_\varepsilon \longrightarrow \min, & 0 < \varepsilon \ll 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Предполагается, что $\operatorname{Re}\sigma(A_{22}) < 0$.

Задача (1) есть задача быстродействия с быстрыми и медленными переменными. Основное отличие рассматриваемой задачи состоит в том, что некоторые собственные числа матрицы при быстрых переменных равны нулю, и тем самым нарушено стандартное условие (см. [1]) асимптотической устойчивости этой матрицы.

Строится асимптотика времени быстродействия и оптимального управления. В настоящей работе используются методы, развитые в работах [2–4]. Асимптотика времени быстродействия в данной задаче даже в случае общего положения носит сложный характер, аналогичный асимптотике из работ [2–5].

Теорема. *При выполнении некоторых естественных предположений относительно матриц системы* (1) *и начальных условий время быстродействия* T_ε *и компоненты вектора, порождающего оптимальное управление, раскладываются в асимптотические ряды вида* $\sum_{k=0}^{\infty} R_k\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big)$*, где* $R_k(\cdot)$ *— рациональные функции своих аргументов и* $R_k\big(\varepsilon, W(\varepsilon)\big) = O(\varepsilon^k)$ *при* $\varepsilon \to +0$*, где*

$$W(\varepsilon) := KW_0(\varepsilon g) = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

здесь K, g *— некоторые известные постоянные, а* $W_0(\varepsilon)$ *— решение уравнения*

$$W_0(\varepsilon)\ln(1/W_0(\varepsilon)) = \varepsilon$$

при малых ε. □

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 14-01-00322, Программы УрО РАН, проект "Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов".

[1] *Гичев Т.Р., Дончев А.Л.* Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.

[2] *А.Р. Данилин, А.М. Ильин.* Асимптотика решения задачи о быстродействии при возмущении начальных условий // Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 96–103.

[3] *А.Р. Данилин, А.М. Ильин.* О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.

[4] *Данилин А.Р.* Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстро стабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.

[5] *Данилин А.Р., Коврижных О.О.* О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.

Обратная задача оптимальной стабилизации для автономных линейных систем дифференциальных уравнений с последействием

Ю. Ф. Долгий
Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
e-mail: Yurii.Dolgii@imm.uran.ru

Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta) x_t(\vartheta) + Bu,\ t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \tag{1}$$

с критерий качества переходных процессов

$$J = \int_{0}^{+\infty} \left(x^\top(t) C_x x(t) + u^\top(t) C_u u(t)\right) dt.$$

Здесь $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $x : [-r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, $r > 0$; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление; матричнозначная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r, 0]$, $\eta(0) = 0$, $det\eta(-r) \neq 0$; B — постоянная матрица; C_x и C_u — положительно определенные матрицы.

Рассматривается постановка задачи оптимальной стабилизации в функциональном пространстве состояний [1–3] $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-r, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^{0} \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta) d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$. При решении прямой задачи оптимальной стабилизации для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последействием получено следующее представление оптимального стабилизирующего управления [4]

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = C_u^{-1} B^\top \left(X^\top(-r)\eta^{-1}(-r)\mathbf{x}(0) \right)$$

$$-\int\limits_{-r}^{0} \left((X^\top(s) - X^\top(-r)\eta^{-1}(-r)\eta(s) \right) \mathbf{x}(s)ds, \ \mathbf{x} \in \mathbb{H}.$$

Здесь X — решение краевой задачи для нелинейного матричного функционально-дифференциального уравнения. Вследствие сложности задачи нахождения решений этого нелинейного матричного функционально-дифференциального уравнения, предлагается перейти к обратной задачи восстановления дифференциального уравнения (1), т.е. матричной функции η, по заданной матричной функции X. Последняя задача является линейной и при ее решении можно использовать аналитические методы. Получены условия, при выполнении которых обратная задача сводится к нахождению решения краевой задачи для автономной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Вследствие сложной структуры линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при определении ее решений использовалось преобразование Лапласа. В результате найдены аналитические решения задачи оптимальной стабилизации для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последействием. Мера Стилтьеса восстановленного дифференциального уравнения с последействием содержит абсолютно непрерывную часть, а также дискретную часть с соизмеримыми запаздываниями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00094-а).

[1] *Красовский Н.Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. матем. и механ. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.

[2] *Gibson J.S.* Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control optimiz. 1983. Vol. 21. No. 5. P. 95–135.

[3] *Долгий Ю.Ф.* К стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 92–105.

[4] *Долгий Ю.Ф.* Аналитические решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. М. 2014. С. 1349–1362.

Об одном численно-аналитическом методе построения синтеза оптимального управления на примере математической модели экономического роста под действием инвестиций в технологии

И. Е. Егоров, **А. С. Братусь**

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК

e-mail: ivanyegorov@gmail.com, alexander.bratus@yandex.ru

Рассматривается нелинейная управляемая система, описывающая динамику объема производства и запаса технологий (инноваций) под действием инвестиций в развитие последних [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} \;=\; \varphi_1 x_1(t) \;+\; \varphi_2 \left(\dfrac{x_2(t)}{x_1(t)}\right)^{\gamma} x_1(t) \;-\; g_1 u(t) x_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} \;=\; g_2 u(t) x_1(t), \\ u(t) \in [u_1, u_2], \quad t \in [0, T], \quad x_1(0) = x_1^0 > 0, \quad x_2(0) = x_2^0 > 0, \\ \Phi(x_1(T)) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; -x_1(T) \;\longrightarrow \inf\limits_{u(\cdot)\,\in\,\mathcal{L}_\infty([0,T],\,[u_1,u_2])}. \end{cases}$$

Здесь x_1 — объем производства, x_2 — запас технологий, $u(\cdot)$ — интенсивность инвестирования в развитие технологий, $T > 0$ — фиксированный горизонт планирования, $g_1 > 0$ — дисконтированная предельная технологическая производительность, $g_2 > 0$ — коэффициент затрат на разработку технологий, $\gamma \in (0, 1)$ — параметр эластичности запаса технологий относительно объема производства, $\varphi_1 > 0$ — вклад в увеличение объема производства, не обусловленный развитием технологий, $\varphi_2 > 0$ — вклад в увеличение объема производства, обусловленный развитием технологий. Задача состоит в максимизации объема производства в конечный момент времени.

Вводится замена переменных $y \overset{\mathrm{def}}{=} \ln x_1$, $z \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{\gamma}$. Пусть также $\tau \overset{\mathrm{def}}{=} T - t$ — обратное время.

Получено аналитическое представление для множества γ^{u_1}, содержащего все такие точки пространства (y, z, τ), в которых совершаются первые в обратном времени (т. е. последние в прямом времени) переключения оптимального позиционного управления. Также сформулирован альтернативный, численный алгоритм построения γ^{u_1}, который основан на представлении частных производных решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным и нередко оказывается более простым в использовании. Уточнены полученные путем исследования краевой задачи принципа максимума Понтрягина результаты Е. В. Григорьевой и Е. Н. Хайлова [1] относительно возможных типов оптимальных программных управлений. С использованием этой информации и найденного множества γ^{u_1} построены различные картины синтеза оптимального управления в зависимости от параметров задачи. При этом задействован подход, представленный, например, в работе [2] и разработанный под влиянием основополагающей монографии [3]. В случае отсутствия особых режимов множество вторых в обратном времени переключений можно искать численно с помощью метода характеристик, используя начальные данные на множестве γ^{u_1}. В случае существования особых режимов функция цены (совпадающая с обобщенным, вязкостным решением задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана) в ряде дополнительных предположений является гладкой и допускает полное качественное представление.

Доклад основан на результатах работы [4].

[1] *Grigorieva, E. V., Khailov, E. N.* Optimal control of a nonlinear model of economic growth // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B 2007; supplement volume:456–466.

[2] *Yegorov, I., Todorov, Y.* Synthesis of optimal control in a mathematical model of tumour-immune dynamics // Optimal Control Applications and Methods 2015; **36**:93–108.

[3] *Субботина Н. Н.* Метод характеристик для уравнений Гамильтона-Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20. С. 3–132.

[4] *Yegorov, I., Bratus, A., Todorov, Y.* Synthesis of optimal control in a mathematical model of economic growth under R&D investments. Under review in Optimal Control Applications and Methods.

Связь золотого правила с равновесием по Бержу

В. И. Жуковский, А. С. Горбатов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: zhkvlad@yandex.ru, gorbatovanton@gmail.com

Золотое правило гласит: «*Поступай по отношению к другому так, как ты хотел бы, чтобы он поступал по отношению к тебе*». Доброжелательный характер этого требования не отвечает используемому в настоящее время способу уравновешивания конфликтов, базирующемуся на концепции равновесия по Нэшу. Отвечает же Золотому правилу концепция равновесия по Бержу, предложенная в России в 1994 году [1-3].

Рассмотрим математическую модель конфликта в виде бескоалиционной одношаговой игры многих лиц

$$\Gamma =< \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} > .$$

Здесь множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$, игроки, не объединяясь в коалиции, выбирают каждый свою стратегию $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, в результате образуется *ситуация* $x = (x_1, \ldots, x_N) \in X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i \subset \mathbb{R}^n$ $(n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i)$; на X определены *функции выигрыша игроков* $f_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$, значения которых называют *выигрышами*.

Ситуация $x^B \in X$ *равновесна по Бержу* (РБ) в Γ, если

$$f_i(x^B) = \max_{x\in X} f_i(x||x_i^B) \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{1}$$

и $x^e \in X$ *равновесна по Нэшу* (РН) в Γ, если

$$f_i(x^e) = \max_{x_i\in X_i} f_i(x^e||x_i) \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

где $(x||z_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$.

Различия (2) и (1) в том, что в (2) каждый игрок стремится «эгоистически» увеличить лишь свой выигрыш, а в (1) каждый направляет все свои усилия, чтобы увеличить выигрыши остальных, «забывая» о своих собственных интересах (такой «альтруистический» подход как раз и отвечает требованиям Золотого правила). Обзор работ по РБ в [4].

Перейдем к *свойствам равновесия по Бержу*:

a) для игры Γ *двух лиц* ситуация РБ совпадает с РН, если перед началом игры соперники обменяются функциями выигрыша;

b) для РБ может *не выполняться условие индивидуальной рациональности* (приводится модельный пример);

c) множество ситуаций РБ внутренне неустойчиво (приводится пример);

d) если множества $X_i \in comp\ \mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$, то множество X^B ситуаций РБ является компактом (может и пустым) и, если при этом $X^B \neq \emptyset$, то существует ситуация РБ одновременно максимальная по Парето по отношению к остальным ситуациям РБ; такие ситуации назовем *ситуации Бержа-Парето* (СБП).

Достаточные условия существования СБП.

Для Γ построим $N+1$ скалярных функций

$$\varphi_i(x,z) = f_i(x||z_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$\varphi_{N+1}(x,z) = \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(z),$$

где $x, z \in X$, а $x_i, z_i \in X_i$ $(i \in \mathbb{N})$, и их гермейерскую свертку $\varphi(x,z) = \max\limits_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x,z)$.

Утверждение. *Если в антагонистической игре* $< X, Z = X, \varphi(x,z) >$ *будет* $\varphi(x, z^B) \leq \varphi(x^0, z^B) \leq \varphi(x^0, z)$ $\forall x, z \in X$, *то СБП в* Γ *будет* $x^B = z^B$.

Следствие. $\left[X_i \in comp\ \mathbb{R}^{n_i} \vee f_i(\cdot) \in C(X)\ (i \in \mathbb{N})\right] \Rightarrow [\exists$ *СБП в смешанных стратегиях*].

На основе этого следствия и управления с поводырем из [5] устанавливается существование СБП в позиционной дифференциальной игре N лиц с терминальными функциями выигрыша.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-00-90408 Укр_а и НАН Украины №03-03-14.

[1] *Вайсман К.С.* Равновесие по Бержу: Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук. СПбГУ, 1995.

[2] *Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., Vaisman K.S.* The Berge Equilibrium. Preprint. // Tbilisi: Institute of Control Systems. 1994.

[3] *Вайсман К.С.* Равновесие по Бержу. // В кн.: Жуковский В. И., Чикрий А. А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры.*. Киев: Наукова Думка. 1994.

[4] *Colman A.M., Körner T. W., Musy O., Tazdait T.* Manual Support in Games: some Properties of Berge Equilibria.// Journal of Mathematical Psychology, Article in Press. 2011.

[5] *Красовский Н.Н., Субботин А.Н.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

Задача управления марковской цепью в условиях неполной информации

Д. С. Завалищин, **Г. А. Тимофеева**

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, УрГУПС

e-mail: zav@imm.uran.ru, gtimofeeva@mail.ru

Рассматривается управляемая динамическая система, описывающая изменения вероятностей состояний марковского случайного процесса. Вследствие особенностей задачи зависимость правых частей системы от управлений не может быть описана линейными функциями. Предполагается, что вероятностные характеристики случайного процесса известны неточно. Такие системы могут описывать процессы в экономике [2], социологии, биологии, в технике, – например, в транспортных системах [1]. Изучаются вопросы построения оптимального управления при различных критериях качества и ограничениях.

Управляемый марковский процесс предполагает следующие виды управлений: программные, зависящие от распределения вероятностей, зависящие от текущего состояния системы. В докладе рассматриваются управления, зависящие от вероятностей состояний.

Дифференциальные уравнения, описывающие изменение вероятностей состояний марковской цепи с непрерывным временем, имеют вид

$$\dot{x}(t) = H^{\top} x(t), \quad t \in [0; T], \tag{1}$$

где H — матрица интенсивностей переходов. Предполагается, что интенсивности переходов h_{ij}, $i \neq j$, зависят от управляющих воздействий $u \in \mathbf{U}$. Особенностью задачи является то, что такая зависимость не может быть линейной в связи с ограниченностью интенсивностей переходов. Во многих прикладных задачах зависимости $h_{ij}(u_k)$ — ограниченные, монотонные функции. Такие функции хорошо описываются зависимостями вида:

$$h_{ij} = a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} u_k}, \quad c_{ij} > 0. \tag{2}$$

В большинстве реальных задач интенсивности переходов точно не заданы и уточняются в процессе функционирования системы. В связи с этим, рассматривается задача оптимального управления для динамической системы с неопределенностью

$$\dot{x} = H^T(u)x + G^T x, \quad G \in \mathbf{G}, \tag{3}$$

где множество $\mathbf{G}$ описывает неопределенность в интенсивностях переходов.

Исследуются различные виды ограничений на управления и на неопределенности в системе. В простейшем случае получены соотношения для оптимальных управлений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-01-00304-а, проект №13-01-00120-а

[1] *Завалищин Д.С., Тимофеева Г.А.* Исследование математической модели регулируемого перекрестка // Труды института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 108–119.

[2] *Timofeeva G.A., Timofeev N.A.* Evaluation of payment flows based on Markov chain model with incomplete information // AIP Conference Proceedings, American Institute of Physics, New York, 1631, 17 (2014); http://dx.doi.org/10.1063/1.4902452

Оценка количества первичных РЛС, необходимого для однозначного определения их систематических ошибок

А. Г. Иванов

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: iagsoft@imm.uran.ru

Первичные РЛС в гражданской авиации — это РЛС, измеряющие азимут до воздушного судна (ВС) и наклонную дальность до ВС. При этом они не поставляют информацию о высоте ВС. Для корректного учета показаний РЛС требуется определять систематические ошибки РЛС по азимуту и дальности. Общая проблематика определения систематических ошибок РЛС изложена в [1]. Из трех алгоритмов, описанных в [1], только алгоритм 1 способен обрабатывать показания первичных РЛС. Алгоритм основан на потраекторной обработке РЛС-треков с последующим статистическим анализом результатов, полученных от большого числа ВС.

Рассмотрим случай, когда наблюдения ведутся только первичными РЛС. Зададимся вопросом — всегда ли возможно однозначное определение систематических ошибок РЛС по показаниям этих РЛС? Для простоты не будем учитывать случайные ошибки. Пусть N_e — общее количество уравнений в системе, описывающей наблюдения, N_u — количество неизвестных в этой системе. Для однозначного определения систематических ошибок необходимо выполнение условия $N_e \geq N_u$. Другими словами, если «коэффициент неизвестности» $k = \frac{N_u}{N_e}$ больше единицы, то систематические ошибки не могут быть определены однозначно.

Основными параметрами, от которых зависит k, кроме содержательной модели ошибок, являются: N_r — число наблюдающих первичных РЛС (предполагаем, что замеры поступают из зоны общей видимости всех РЛС); N_l — число областей (мест), из которых поступают замеры. Последний параметр подразумевает, что расстояние между областями достаточно велико и взаимное расположение их должно быть «удачным», чтобы уравнения в системе, описывающей наблюдения, были независимыми. При этом условие $k \leq 1$ окажется не только необходимым для однозначного определения ошибок, но и достаточным.

Рассмотрим несколько вариантов модели ошибок.

1. Систематическая ошибка по азимуту не зависит от местоположения ВС, систематическая ошибка по дальности отсутствует.

В этом случае $N_u = 3N_l + N_r$, $N_e = 2N_l N_r \Rightarrow k = \frac{3}{2N_r} + \frac{1}{2N_l}$. При $N_l = 1$ для однозначного определения систематических ошибок достаточно трех РЛС, при большем числе областей замеров (т.е. при $N_l \geq 2$) достаточно двух РЛС.

2. Систематические ошибки по азимуту и дальности не зависят от местоположения ВС.

Здесь имеем $N_u = 3N_l + 2N_r$, $N_e = 2N_l N_r \Rightarrow k = \frac{3}{2N_r} + \frac{1}{N_l}$. При наличии только одной области замеров и любом числе локаторов не выполняются условия однозначного определения ошибок. Для двух РЛС необходимые условия требуют не меньше четырех областей замеров. Для трех РЛС достаточно двух областей замеров.

3. Систематические ошибки по азимуту и дальности зависят от местоположения ВС.

Имеем $N_u = 3N_l + 2N_l N_r$, $N_e = 2N_l N_r \Rightarrow k = \frac{3}{2N_r} + 1$. Здесь $k > 1$ $\forall N_r > 0$, т.е. однозначное определение систематических ошибок по дальности и азимуту, зависящих от местоположения ВС, по показаниям первичных РЛС невозможно.

В последнем случае применимы различные подходы: использование более тонкой модели систематических ошибок (например, ограничение константы Липшица, см. алгоритм 2 из [1]); совместная обработка показаний первичных и вторичных РЛС; использование дополнительной информации (например, показаний бортового навигационного комплекса). Все эти подходы имеют свои плюсы и минусы.

В работе рассмотрены также другие варианты моделей систематических ошибок и соответствующие необходимые условия их определения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-01-07909.

[1] *Бедин Д.А., Беляков А.В., Ганебный С.А., Иванов А.Г., Строков К.В., Федотов А.А.* Совместная обработка данных от нескольких РЛС для выявления систематических ошибок по азимуту и дальности // Сб. докл. XIX международной научно-технической конференции "Радиолокация, навигация, связь" (RLNC*2013). Воронеж: "САКВОЕЕ", 2013. Т. 3. С. 1567–1578.

К вопросу о дополнительном размещении логистических объектов на существующей сети

А. Л. Казаков, А. А. Лемперт

Иркутск, Институт динамики систем и теории управления СО РАН

e-mail: kazakov@icc.ru, lempert@icc.ru

Рассматривается задача о дополнительном размещении логистических объектов (ЛО) на существующей сети с одновременным переопределением логистических зон. Такая постановка является вполне естественной, поскольку в большинстве случаев открытие таких ЛО происходит на территории, которая уже обслуживается. При этом наиболее содержательными являются следующие ситуации: размещение дополнительных ЛО имеет целью максимизировать собственную логистическую зону, либо минимизировать максимальное время достижения потребителями ближайшего к ним центра. Первая задача обычно возникает при размещении коммерческих предприятий, вторая — имеет социальную направленность. Отметим, что указанные постановки обобщают изученные авторами ранее задачи о размещении логистических центров при точечном [1] и распределенном [2] размещении потребителей; также показано, что такие задачи можно рассматривать как задачи оптимального управления [3].

Рассмотрим первую задачу более подробно. Пусть в некоторой ограниченной области $D \subseteq R^2$ заданы точки $B_i(x_i, y_i)$, где располагаются потребители с известным объемом потребления b_i, $i = \overline{1, N}$ и функция $v(x, y) > 0$, характеризующая скорость движения грузов. Тогда для любой точки $Z(x, y) \in D$ минимальное время доставки из Z в B_i вычисляется как

$$T_i(Z) = \min_{\Gamma_i(Z)} \int \frac{d\Gamma_i}{v(x, y)},$$

где $\Gamma_i(Z) \in G$, $i = \overline{1, n}$ – маршрут, соединяющий B_i и Z, G – множество всевозможных маршрутов.

В точках $A_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, m}$ расположены существующие ЛО и задано M новых ЛО Q_j, координаты которых пока неизвестны. Будем считать, что потребитель входит в логистическую зону того ЛО, время доставки груза из которого минимально.

Требуется найти оптимальные расположение дополнительных

ЛО $Q_j, j = \overline{1, M}$ такое, чтобы суммарный объем потребления в их объединенной логистической зоне был максимальным. Параметрами максимизации являются координаты дополнительных ЛО и состав подмножеств потребителей.

Случай, когда открытие нового ЛО направлено не на захват рынка, а на повышение качества обслуживания, и, соответственно, он работает в кооперации с существующими (вторая задача), сводится к рассмотренной ранее авторами задаче об оптимальном размещении нескольких логистических центров [2].

Для решения указанных задач предложены численные методы, основанные на оптико-геометрическом подходе [4], развиваемом авторами [1,2]. Выполнены вычислительные эксперименты, показавшие работоспособность разработанных методов.

Одним из возможных направлений развития полученных результатов является переход в исследуемых задачах к игровой постановке [5], когда существующие ЛО могут совершать определенные действия, направленные на защиту «своего» сегмента рынка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №14-07-00222, 13-06-00653.

[1] *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автом. и телемех. 2011. № 7. С. 50–57.

[2] *Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С.* К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автом. и телемех. 2013, № 6. С. 87–100.

[3] *Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В., Казаков А.Л.* О построении решений задачи о сближении в фиксированный момент времени // Известия ИГУ. Серия Математика. 2012. Т. 5, № 4. С. 95–115.

[4] *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3. С. 27–37.

[5] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1974. 456 с.

Управление с поводырем в задаче выведения ракеты-носителя

И. Н. Кандоба, В. Б. Костоусов, Е. К. Костоусова,

И. В. Козьмин, А. Б. Ложников

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: kandoba@imm.uran.ru

В.И. Починский

Екатеринбург, Научно–производственное объединение автоматики имени академика Н.А. Семихатова

Исследуется задача оптимального выведения ракеты-носителя (РН) на заданную околоземную эллиптическую орбиту при ограничениях на управление и текущее фазовое состояние нелинейной динамической системы, описывающей движение РН. Математическая модель управляемого движения РН включает уравнения поступательного движения его центра масс и уравнения вращательного движения РН как твердого тела. Двигательная установка РН состоит из одного жестко закрепленного основного двигателя, создающего тягу вдоль оси симметрии РН, и четырех подвижных рулевых двигателей. Движение РН на промежутке $[t_{\mathrm{s}}, t_{\mathrm{f}}]$ описывается уравнениями:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = W_{\mathrm{R}}(t, x, \vartheta, \psi, \varphi, \delta) + W_{\mathrm{A}}(t, x, v, \vartheta, \psi, \varphi) + g(x), \tag{1}$$

$$\dot{\omega} = \Lambda(t, \omega) + \mathrm{M}(t, x, \delta), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= (\omega_2 \sin\varphi + \omega_3 \cos\varphi) \,/\, \cos\psi, \\ \dot{\psi} &= \omega_2 \cos\varphi - \omega_3 \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \omega_1 + (\omega_2 \sin\varphi + \omega_3 \cos\varphi)\ \mathrm{tg}\,\psi, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{\delta} = u, \tag{4}$$

где $x, v \in \mathbb{R}^3$ — положение и скорость центра масс РН; $\omega \in \mathbb{R}^3$ — угловая скорость; ϑ, ψ, φ — углы тангажа, рыскания и вращения соответственно, которые определяют пространственную ориентацию РН. Управлениями $u(t) \in \mathbb{R}^4$ служат скорости изменения углов δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ поворота продольных осей камер рулевых двигателей, $|u_i(t)| \le u_i^{\max}$. Считаются заданными t_{s}, начальные условия и значения параметров орбиты выведения. Требуется минимизировать значение t_{f} — момент выведения РН на заданную орбиту. При этом к движению РН предъявляется ряд дополнительных требований.

Для построения допустимого в этой задаче управления предлагается следующий подход, основанный на идеологии задач управления с поводырем [1]. Наряду с системой (1)-(4) рассматривается упрощенная система (5), которая определяет траекторию движения центра масс РН:

$$\begin{aligned}&\dot{\bar{x}} = \bar{v}, \quad \dot{\bar{v}} = \bar{W}_{\mathrm{R}}(t, \bar{x}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi}) + \bar{W}_{\mathrm{A}}(t, \bar{x}, \bar{v}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi}) + g(\bar{x}),\\ &\dot{\bar{\vartheta}} = \bar{U}_1, \quad \dot{\bar{\psi}} = \bar{U}_2.\end{aligned} \qquad (5)$$

Система (5) используется в качестве поводыря для системы (1)-(4). Известен [2] алгоритм построения для системы (5) управления $\bar{U} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2)$, обеспечивающего выведение центра масс РН на заданную орбиту за время, близкое к минимальному. Подставляя это управление в кинематические уравнения (3), для системы (1)-(4) удается аналитически определить сопутствующие позиции $\omega_i(t)$, $t \in [t_{\mathrm{s}}, \bar{t}_{\mathrm{f}}]$ $(i = 1, 2, 3)$. Разработан алгоритм построения по этим сопутствующим позициям допустимых управлений $u(t)$ $(t \in [t_{\mathrm{s}}, \bar{t}_{\mathrm{f}}])$ для системы (1)-(4), который существенно опирается на специфику выражений для $\Lambda(t, \omega)$ и $\mathrm{M}(t, x, \delta)$ в динамических уравнениях (2). Предложена итерационная (по t_{s}) процедура нахождения для системы (1)-(4) допустимого управления, обеспечивающего близость траектории этой системы к траектории системы (5).

Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о достаточной эффективности такого подхода к решению исследуемой задачи.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН “Математические задачи современной теории управления” и программы ориентированных фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 13-1-012-НПО).

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.

[2] *Мазгалин Д.В.* Построение способа управления ракетой-носителем при использовании в качестве управления программных угловых скоростей разворотов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3 (46). С. 21–29.

Оптимальные алгоритмы управления ВИЧ моделью Callaway–Perelson

А. В. Ким, **А. В. Иванов**, **Х. Д. Квон**,

Р. И. Мурзин, **Г. А. Бочаров**

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: avkim@imm.uran.ru

На основе математической модели [2] исследуется минимальная продолжительность и оптимальные стратегии лечения вируса иммунодефицита человека 1 типа. Формализация задачи подразумевает перевод состояния системы в «здоровое» состояние с низкой вирусной нагрузкой и сильным иммунным ответом. Оптимальное управление системой и минимальное время находятся на основе применения принципа максимума Понтрягина [3].

Исследуемая ВИЧ модель представляет собой нелинейную динамическую систему, моделирующую закономерности процессов развития ВИЧ инфекции с учетом лечебных воздействий:

$$
\begin{cases}
\dot{T}_1 = \lambda_1 - d_1 T_1 - (1-u_1)k_1 V T_1 \,, \\
\dot{T}_2 = \lambda_2 - d_2 T_2 - (1-fu_1)k_2 V T_2 \,, \\
\dot{I}_1 = (1-u_1)k_1 V T_1 - \delta I_1 - m_1 E I_1 \,, \\
\dot{I}_2 = (1-fu_1)k_2 V T_2 - \delta I_2 - m_2 E I_2 \,, \\
\dot{V} = (1-u_2)N_T \delta (I_1+I_2) \\
\qquad - cV - [(1-u_1)\rho_1 k_1 T_1 + (1-fu_1)\rho_2 k_2 T_2]\, V \,, \\
\dot{E} = \lambda_E + \dfrac{b_E(I_1+I_2)}{(I_1+I_2)+K_b} E - \dfrac{d_E(I_1+I_2)}{(I_1+I_2)+K_d} E - \delta_E E \,,
\end{cases}
\qquad (1)
$$

где (T_1, T_2) — концентрации популяций здоровых клеток-мишеней (клетки/мл); (I_1, I_2) — концентрации популяций зараженных клеток (клетки/мл); V — концентрация вирусных частиц (вирионы/мл); E — концентрация клеток-киллеров (клетки/мл); u_1, u_2 — управляющие воздействия (эффективности лекарственных препаратов); остальные переменные — константы, характеризующие скорость протекания биологических процессов.

Задача оптимального управления системой (1) состоит в нахождении допустимой пары управлений $(u_1^*(t), u_2^*(t))$, переводящей систему из «нездорового состояния» $(T_1^0, T_2^0, I_1^0, I_2^0, V^0, E^0)$ в «здоровое» $(T_1^*, T_2^*, I_1^*, I_2^*, V^*, E^*)$, доставляя при этом минимум функционалу качества:

$$
\begin{aligned}
J(u_1(\cdot), u_2(\cdot), t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \left[R_1 u_1^2(t) + R_2 u_2^2(t)\right] dt \\
+ Q\left(V(t) - V^*\right)^2 + S\left(E(t) - E^*\right)^2 + P t_f^2 ,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где R_1, R_2, Q, S, P — весовые коэффициенты управлений, концентрации вируса, концентрации клеток–киллеров и продолжительности лечения соответственно.

Решение задачи оптимального управления (1)–(2) строится на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Работа выполнена при поддержке программы президиума РАН «Фундаментальные науки — медицине» и РФФИ (проекты 14-01-00477, 14-01-00065, 13-01-00110).

[1] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[2] *Callaway D.S., Perelson A.S.* HIV-1 infection and low steady state viral loads, Bull. Math. Biol., 64, 29–64 (2001).

[3] *Бочаров Г.А., Ким А.В., Красовский А.Н., Черешнев В.А., Глушенкова В.В., Сафронов М.А., Азиатцева В.В., Третьякова Р.М., Мейерханс А.* Актуальные проблемы математического моделирования и оптимального управления динамикой ВИЧ инфекции // Российский иммунологический журнал. 2014. Т. 8(17), № 3. С. 778–781.

[4] *Ким А.В., Красовский А.Н., Глушенкова В.В.* Об управлении математической моделью ВИЧ процесса // Аграрный Вестник Урала. 2015. № 1. С. 21–24.

[5] *Bocharov G., Kim A., Krasovskii A., Chereshnev V., Glushenkova V., Ivanov A.* An extremal shift method for control of HIV infection dynamics // Russian Journal Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2015. V. 30, Iss. 1.

Задача Рамсея: три подхода к решению

Ю. Н. Киселев, М. В. Орлов, С. М. Орлов

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

e-mail: kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su, sergey.orlov@cs.msu.su

В докладе рассматривается одномерная нелинейная задача оптимального управления с бесконечным горизонтом планирования

$$\dot{x} = ux^{\varepsilon} - \mu x, \quad x(0) = x_0, \quad J[u] = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\nu t}(1-u)x^{\varepsilon}\,dt \to \max_{u(\cdot)}, \quad (1)$$

где одномерная фазовая переменная x играет роль фондовооруженности, управление $u(t) \in [0,1]$ — доля капиталовложений от производственного выпуска, параметр $\mu > 0$ — коэффициент амортизации производственных фондов, $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования, $\varepsilon \in (0,1)$ — коэффициент эластичности по производственным фондам. Функционал $J[u]$ описывает дисконтированное удельное потребление.

В докладе обсуждаются три подхода к решению задачи (1). Первый метод решения основан на специальном интегральном представлении функционала с исключенным управлением, использует информацию о множествах достижимости объекта и допускает конструктивное описание оптимального значения функционала. Этот подход дает наиболее простой способ решения задачи (1). С методической точки зрения интересно применить для решения задачи принцип максимума Понтрягина (ПМП) и метод динамического программирования Беллмана (ДПБ). Во втором подходе с помощью ПМП, см. [1], ищется экстремальное решение, а обоснование его оптимальности выполняется с привлечением теоремы о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций ПМП в условиях бесконечного горизонта и наличия особых режимов, простейшая версия которой изложена в [2], [3]. Третий подход основан на методе ДПБ, см. [1], §15 (а также [4]). Гладкое решение уравнения Беллмана строится в форме $V(t,x) = e^{-\nu t}v(x)$. График функции $v(x)$, где $\varepsilon = 0.5, \mu = \nu = 0.1$, представлен на рис. 1.

Полученные результаты можно использовать для изучения характера зависимости оптимального значения функционала от параметров задачи.

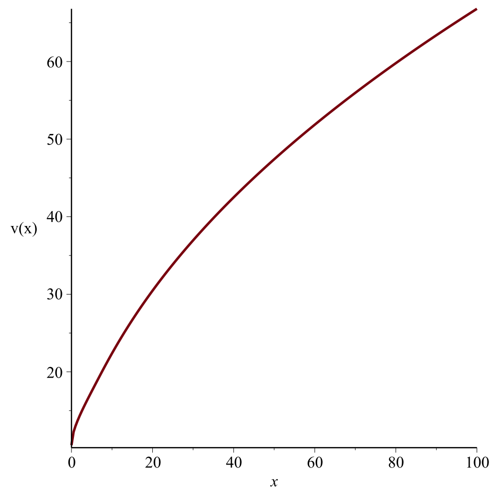

Рис. 1. График функции $v(x)$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 14–11–00539.

[1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

[2] Киселев Ю. Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии. М.: МАКС Пресс, 2003. С. 57–67.

[3] Аввакумов С. Н., Киселев Ю. Н. Некоторые алгоритмы оптимального управления // Труды института математики и механики УрО РАН. Том 12, выпуск 2, 2006. С. 12–17.

[4] Киселев Ю. Н. Метод динамического программирования в непрерывных управляемых системах (2 лекции) http://lib.mexmat.ru/books/14710

Кооперативные решения в неантагонистических позиционных дифференциальных играх многих лиц

А. Ф. Клейменов
Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

В докладе рассматривается кооперативная неантагонистическая позиционная дифференциальная игра многих лиц на фиксированном промежутке времени с нетрансферабельными выигрышами игроков. В отличие от широко принятой (см.,например, [1]) формализации кооперативной игры как игры в форме характеристической функции, предлагаемая постановка игры осуществляется в стратегической форме. Помимо естественного предположения о наличии у каждого игрока полной информации о текущей позиции игры, также предполагается, что на основе исходной содержательной постановки задачи заранее определяется множество *возможных* коалиций игроков, одна из которых может отклониться от решения в любой момент по ходу игры. Далее, в случае такого отклонения все игроки получают информацию в момент отклонения о самом факте отклонения и о составе отклонившейся коалиции.

В соответствии с этими информационными предположениями вводятся понятия стратегий игроков и порождаемых ими движений на основе понятий стратегий и движений, введенных в [2], [3] (см. также [4]). Интересы игроков заданы их терминальными показателями.

Предлагаемый в качестве кооперативного решения набор стратегий игроков удовлетворяет следующему условию. Не существует такой *возможной* коалиции игроков, что ее отклонения от решения в течение игры будут выгодны для этой коалиции. Отклонение от решения считается выгодным для коалиции, если все члены коалиции в результате отклонения получает выигрыши, строго большие, чем в игре без отклонений. Структура стратегий, входящих в предлагаемое решение, предусматривает наказание игроков отклонившейся коалиции со стороны остальных игроков. Стратегии наказания находятся как разрешающие стратегии в некоторых вспомогательных антагонистических играх.

Результаты исследования иллюстрируются на следующем примере. Динамика игры трех лиц описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = u + v + w, \;\; x, u, v, w \in R^2, \quad x(t_0) = x_0,$$
$$\|u\| \leq 1, \;\; \|v\| \leq 1, \;\; \|w\| \leq 1.$$

Управления u, v, w подчинены соответственно первому, второму и третьему игрокам. Игра рассматривается на заданном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$. Цель i-го игрока ($i = 1, 2, 3$) заключается в приведении фазового вектора системы $x(\vartheta)$ как можно ближе к заданной целевой точке $a^{(i)}$, т.е. терминальный функционал качества, максимизируемый i-ым игроком, имеет вид

$$\sigma_i(x(\vartheta)) = -\|x(\vartheta) - a^{(i)}\|, \;\; i = 1, 2, 3.$$

Предположим,что множество возможных коалиций состоит из всех одноэлементных коалиций и одной двухэлементной коалиции $\{1,3\}$. Были заданы следующие числовые значения параметров игры: $t_0 = 0$, $x_0 = (0; 0)^T$, $a^{(1)} = (-3.0; 4.5)^T$, $a^{(2)} = (0; 3.5)^T$, $a^{(3)} = (3.0; 4.5)^T$.

После соответствующих вычислений было получено множество траекторий, порожденных кооперативными решениями игры. Стратегии, построенные на основе этих траекторий, исчерпывают по существу все множество кооперативных решений.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-13.

[1] *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.

[2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[3] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

[4] *Клейменов А.Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.

Стабилизация конечномерных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8

Е. В. Кошкин

Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

e-mail: koshkin@uralmail.com

Задача нахождения оптимального стабилизирующего управления для общего класса систем дифференциальных уравнений с последействием и общего множества допустимых управлений является достаточно сложной. В работах автора задача стабилизации исследовалась для специальных классов систем с последействием, пространства решений которых конечномерны, а множества допустимых управлений состоят из кусочно-постоянных функций [1, 2]. Были теоретически обоснованы различные методы нахождения оптимального стабилизирующего управления и для каждого из них был разработан численный метод и алгоритм решения задачи оптимальной стабилизации. Эти методы и алгоритмы составляют основу программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 (свидетельство государственной регистрации №2014661613 от 10.11.2014). Работа программного комплекса апробирована на популяционных моделях.

Программный комплекс позволяет решать задачи оптимальной стабилизации решений систем с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^o(t)x(t) + \sum_{k=0}^{l} A_k(t)x([t-k]) + B(t)u,\ t \in \mathbb{R}^+, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A^o : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $A_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $k = 0, ..., l$, — непрерывные 1-периодические функции, $B : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{m\times r}$ — непрерывная 1-периодическая функция, $[a]$ — целая часть числа a.

Комплекс позволяет решать задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений, правая часть которых задается конечномерными вольтерровыми по Тихонову операторами

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t) + B(t)u,\ t \in \mathbb{R}^+, \qquad (2)$$

где оператор $F\colon C\left([-\tau,+\infty),\mathbb{R}^m\right)\to L_1^{loc}\left((0,+\infty),\mathbb{R}^m\right)$ удовлетворяет свойству $\left(Fx(\omega+\cdot)\right)(t)=\left(Fx(\cdot)\right)(\omega+t)$, $t\in\mathbb{R}^+$, и его значения на $(0,\omega]$ совпадают со значениями оператора

$$\left(F(x)\right)(t)=\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K_i}A_{ik}(t)\chi_{(t_{i-1},t_i]}(t)\int\limits_{t_i-\tau}^{t_{i-1}}d\hat{\eta}_{ik}(s)x(s),\ \ t\in(0,\omega].$$

Здесь $K_i\in\mathbb{N}$; A_{ik} — ω-периодические матричнозначные функции интегрируемые по Лебегу на $(0,\omega]$; $\chi_E(\cdot)$ — индикатор множества E; $\hat{\eta}_{ik}$ — матричнозначные функции, элементы которых имеют ограниченные вариации на $[-\tau,\omega]$, $\hat{\eta}_{ik}(s)=0$ при $s\in(t_{i-1},\omega]$, $\hat{\eta}_{ik}(s)=\hat{\eta}_{ik}(t_i-\tau)$ при $s\in[-\tau,t_i-\tau]$, $1\le k\le K_i$, $1\le i\le I$; при каждом i, $1\le i\le I$, набор функций A_{ik} и $\hat{\eta}_{ik}$, $1\le k\le K_i$, выбран линейно независимым; B — ω-периодическая матричная функция, интегрируемая на $(0,\omega]$.

Оптимальное управление в множестве допустимых управлений минимизирует функционал

$$J=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(x^T(t)D_x(t)x(t)+u^T(t)D_u(t)u(t)\right)dt,$$

где $D_x:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^{m\times m}$ и $D_u:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^{m\times r}$ — непрерывные 1-периодические для систем (1) или ω-периодические для систем (2) функции, значения $D_x(t)$ являются неотрицательно определенными матрицами, значения $D_u(t)$ — положительно определенными матрицами.

[1] *Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.* Использование конечномерных аппроксимаций в задаче стабилизации периодических систем с последействием. // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 29–45.

[2] *Кошкин Е.В.* Метод продолжения по параметру в задаче оптимальной стабилизации линейных периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Системы управления и информационные технологии. Москва-Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2012. С. 16–20.

Задача априорной разработки оптимального алгоритма тестирования системы управления БПЛА

С. В. Кругликов
Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: svk@imm.uran.ru

Актуальным вопросом является разработка технологии формирования методик для процесса натурного тестирования алгоритмов и программного обеспечения систем управления распределенными комплексами. В состав таких комплексов включаются автономные и/или дистанционно-управляемых аппараты; подсистемы управления и связи, анализа состояния и реагирования на изменение обстановки. В работе рассмотрена задача моделирования пространственного движения группы объектов ограниченной маневренности на основе формализации иерархических систем управления. Конструктивное описание системы препятствий задано конечным порождающим семейством замкнутых шаров. Для моделирования системы препятствий и семейства возможных решений принципиальное значение имеет технология работы с выпуклыми оболочками связных множеств и их дополнениями до выпуклой оболочки. В работе представлен алгоритм, опирающийся на аналитическое описание выпуклой оболочки конечного набора точек. Приведено дискретное описание элементов выпуклой оболочки, позволяющее разделить общую задачу построения оболочки на серию отдельных задач для сужающихся подмножеств, что позволяет сформулировать для типовых ситуаций условия параллельного выполнения построений. Приведены условия, определяющие связь различных уровней иерархии описания препятствий в зависимости от соотношения точности. Исходные данные для процесса тестирования и моделирования маршрута включают: описание картографической информации, параметрическую запись постановки задачи, приоритеты целеуказания, а также гипотезу о возможном противодействии. Предлагаемые алгоритмы предназначены для применения в системах автоматизации процесса организации и программного сопровождения в условиях полигона натурных испытаний отдельных БПЛА и их включающих комплексов робототехнических средств.

Сходимость решения задачи реконструкции динамики макроэкономической модели

Е. А. Крупенников, **Т. Б. Токманцев**
Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: krupennikov@imm.uran.ru, tokmantsev@imm.uran.ru

В данной работе рассматривается модель макроэкономики, предложенная Э.Г. Альбрехтом [1]:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{\partial G(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_1} u_1(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{\partial G(x_1(t), x_2(t))}{\partial x_2} u_2(t), \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, x_1 – производство, x_2 – затраты на производство, $G(x_1, x_2)$ – макроэкономический потенциал (прибыль), который задается формулой $G(x_1, x_2) = x_1 x_2 (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2)$. Константы a_0, a_1, a_2 – некоторые постоянные параметры, $u_1(t)$, $u_2(t)$ – управления, на которые наложены ограничения

$$u(t) \in U = \{u = (u_1, u_2) \colon |u_1| \le U_1, \quad |u_2| \le U_2\}, \qquad t \in [0, T], \tag{2}$$

где $U_1 > 0$, $U_2 > 0$. Ставится задача реконструкции динамики этой модели по известной истории замеров $y_1(t_i) = x_1(t_i)$, $y_2(t_i) = x_2(t_i)$, $G(t_i)$, $i = 0, \ldots, N$, $t_0 = 0$, $t_N = T$, интерполируемой некоторыми гладкими функциями $y_1(t)$, $y_2(t)$.

Под решением задачи реконструкции динамики понимается нахождение законов управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, приближающих так называемое нормальное управление, порождающее базовую траекторию (с которой были сняты замеры $y_1(t)$, $y_2(t)$) и имеет наименьшую норму в L_2.

Для решения этой задачи вводится в рассмотрение вспомогательная задача оптимального управления системой (1), (2), имеющая целью минимизацию функционала с отрицательной невязкой [2]

$$I_{t_0, x_0}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} \left[-\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2 + (x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \frac{\alpha^2 (u_1^2 + u_2^2)}{2} \right] dt, \tag{3}$$

где $\alpha > 0$ — регуляризирующий параметр, $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ — траектория системы (1), вышедшая из точки $x(t_0) = x_0$ под воздействием допустимого управления $u : [t_0, T] \to U$.

Задача оптимального управления (1)–(3) решается с помощью метода характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. В основе метода лежит принцип максимума Понтрягина [3].

При некоторых предположениях, которые выполняются для рассматриваемой модели, была доказана следующая теорема о свойствах решений характеристической системы:

Теорема. *Существует такое число $\alpha_0 > 0$, что решения характеристической системы при всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и $t \in [0, T]$ удовлетворяют оценкам*

$$|x_1(t) - y_1(t)| < 2\alpha L_1, \qquad |x_2(t) - z_2(t)| < 2\alpha L_2,$$

где L_1, L_2 - положительные константы, определяемые независимо от параметра α.

Было показано, что невязки $x_1(t) - y_1(t), x_2(t) - y_2(t)$ имеют колебательный характер с амплитудой, прямо пропорциональной малому параметру α и частотой, обратно пропорциональной α. Это означает, что при условии $\alpha \to 0$

$$\|x_1(t) - y_1(t)\|_C \to 0, \ \|x_2(t) - y_2(t)\|_C \to 0.$$

Соответствующие же этим решениям характеристикой системы управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ будут в пространстве L_2 сходиться к нормальным управлениям.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14–01–00168.

[1] *Альбрехт Э.Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». 2002. Т. 5. С. 54-86.

[2] *Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б.* Исследование устойчивости решения обратных задач динамики управляемых систем по отношению к возмущениям входных данных.// Труды ИММ УрО РАН. Т.20. №3. С.

[3] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов, М.:Наука, 1961.

Мультиуровневая оптимизация в моделях пропорционального экономического роста

$\boxed{\text{А. В. Кряжимский}}$

Москва, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН и Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)

А. М. Тарасьев

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН и Международный институт прикладного системного анализа (IIASA)

e-mail: tam@imm.uran.ru, tarasiev@iiasa.ac.at

Работа связана с построением и анализом модели пропорционального развития в рамках теории экономического роста. Предлагаемый подход увязывает элементы классических моделей [1] и идеи пропорциональности оптимальных решений статических микроэкономических и макроэкономических моделей [2] с конструкциями динамической оптимизации в принципе максимума Понтрягина [3] и его обобщениями для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом [4].

Модель реализует результаты исследований по оптимизации инвестиций в производственные факторы [5] и существенно дополняет и обновляет их применением конструкций мультиуровневой оптимизации.

На первом уровне рассматривается оптимизационная процедура для статической задачи при фиксации текущего временного периода. Здесь возможны две стандартные постановки или задача минимизации затрат при фиксированном уровне выпуска, или двойственная к ней задача максимизации объемов выпуска при заданном уровне затрат. Показывается, что для моделей с классическими производственными функциями решения обеих поставленных задач статической оптимизации обладают свойствами пропорциональности: пропорции в оптимальных факторах производства определяются пропорциями между ценами и коэффициентами эластичности производственных функций.

На втором уровне исследуется задача оптимального управления при выполнении условий пропорциональности. Ставится задача оптимального управления для интегральной функции полезности с логарифмическим потребительским индексом на траекториях системы, задающих динамику производственных факторов. Решение задачи оптимального управления строится в рамках принципа максимума Понтрягина. Это решение задается аналитическими формулами для широкого диапазона модельных параметров, включая программно зависящие от времени цены и коэффициенты эластичности. Аналитические решения для оптимального управления получаются как для задач с конечным горизонтом, так и с бесконечным горизонтом. Оптимальные уровни инвестиций генерируют систему дифференциальных уравнений для производственных факторов, схожую с конструкциями позиционных дифференциальных игр [6].

Благодаря эффективной конструкции предлагаемая методология многоуровневой оптимизации может быть применена для прогностического моделирования в многоразмерных экономических системах.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований РАН № 28, проекта УрО РАН № 15-16-1-13, проекта УрО РАН № 15-7-1-22, проекта РФФИ № 14-01-00486-а и Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

[1] *Solow, R.M.* Growth Theory: An Exposition. New York: Oxford Univ.Press, 1970.

[2] *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.:АЙРИС ПРЕСС, 2002.

[3] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.

[4] *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 257. С. 5–271.

[5] *Tarasyev, A.M., Watanabe, C.* Optimal Dynamics of Innovation in Models of Economic Growth // Journal of Optimization Theory and Applications, 2001. Vol. 108. P. 175–203.

[6] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Метод многогранников в задаче аппроксимации траекторий линейной управляемой системы при наличии фазовых ограничений

Д. Р. Кувшинов

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: kuvshinovdr@yandex.ru

Пусть динамика системы задана уравнением:

$$\dot{x} = B(t)u + f(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P(t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1}$$

где отображения f и B покомпонентно непрерывны, отображение P непрерывно в метрике Хаусдорфа и принимает значения из множества выпуклых многогранников. Наложены фазовые ограничения следующего вида:

$$\forall t \in [t_0, \vartheta] \; x(t) \in G(t) \setminus \operatorname{int} W(t), \tag{2}$$

где отображения G и W непрерывны в метрике Хаусдорфа, и $G(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое многогранное множество (возможно, неограниченное), а $W(t) \subset \mathbb{R}^n$ представимо в виде объединения конечного набора выпуклых многогранников.

Задав конечный набор узлов $\{t_j\}_0^\Theta \subset [t_0, \vartheta]$, получим дискретный аналог системы (1):

$$x_j = x_{j-1} + \mathcal{B}_j u_j + F_j, \quad j \in 1 : \Theta, \tag{3}$$

Ограничения (2) естественным образом переносятся на значения x_j, отвечающие моментам t_j.

Требуется построить траекторию системы (3), удовлетворяющую заданным фазовым ограничениям, либо убедиться, что таковой не существует.

Одним из возможных подходов к решению данной задачи является использование сеточного метода, основанного на дискретизации фазового пространства [1]. Однако, данный подход имеет ряд недостатков. В частности, способность сеточного метода находить существующие траектории зависит от выбранного шага сетки, поэтому построенная на его основе процедура не способна надежно установить факт отсутствия искомых траекторий.

В качестве альтернативы сеточному методу выступает метод многогранников. Выпуклые многогранники могут быть заданы как выпуклые оболочки точечных множеств или как пересечения полупространств, заданных гиперплоскостями [2]. Произвольные многогранники могут быть представлены в виде симплициальных комплексов или двоичных деревьев, основанных на разбиении пространства гиперплоскостями (*BSP-деревьев*). BSP-деревья позволяют выполнять над многогранниками ряд геометрических операций [3].

Предложенный в докладе метод основан на двоичных разбиениях пространства, позволяющих рекурсивно разбивать множество позиций допустимых траекторий на выпуклые компоненты, и формирует трубку, внутри которой проходит допустимая траектория, либо устанавливает факт отсутствия таких траекторий. Близкими к нему являются методы планирования движения на основе семплирования и декомпозиции фазового пространства [4, 5].

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002) и РФФИ (проекты 12-01-00290 и 14-01-31319).

[1] *Кувшинов Д.Р.* Численное построение решений по Нэшу в линейной позиционной дифференциальной игре двух лиц с фазовым пространством размерности больше двух // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 170–181.

[2] *Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H.* The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. 1996. Vol. 22, No. 4. P. 469–483.

[3] *Naylor B.F., Amandatides J., Thibault W.* Merging BSP trees yields polyhedral set operations // ACM Computer Graphics. 1990. Vol. 24, No. 4. P. 115–124.

[4] *LaValle S.* Planning Algorithms. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.

[5] *Tokuta A.O.* Motion planning using Binary Space Partitioning // Intelligent Robots and Systems'91: Proc. of IEEE Int. Workshop, Osaka, 3–5 Nov. 1991. Vol. 1. Osaka: IEEE, 1994. P. 86–90.

Сильно гарантированный дележ в одной дифференциальной игре при неопределенности

К. Н. Кудрявцев, И. С. Стабулит

Челябинск, Южно–Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

e-mail: kudrkn@gmail.com, irisku76@mail.ru

Рассматривается дифференциальная позиционная кооперативная линейно-квадратичная игра двух лиц при неопределенности, которую образует упорядоченная пятерка

$$\langle \{1,2\},\ \textstyle\sum,\ \{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,2},\ \mathcal{Z},\ \{\mathcal{J}_i(U,Z,t_0,x_0)\}_{i=1,2}\rangle. \qquad (1)$$

В (1) участвуют два игрока с порядковыми номерами 1 и 2. Изменение (во времени t) управляемой системы $\sum$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + z, \quad x(t_0) = x_0. \qquad (2)$$

Здесь время $t \in [t_0, \vartheta]$, постоянные $\vartheta > t_0 \geqslant 0$; фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^n$, (t,x) — позиция игры, (t_0,x_0) — начальная позиция; неопределенный фактор $z \in \mathbb{R}^n$; $n \times n$–матрица $A(t)$ непрерывна на $[0,\vartheta]$; $u_i \in \mathbb{R}^n$ — управляющее воздействие i-го игрока ($i = 1,2$). Множество стратегий i-го игрока имеет вид

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t,x) = P_i(t)x + p_i(t) \,|\, \forall P_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta], p_i(\cdot) \in C_n[0,\vartheta]\}.$$

Неопределенность Z отождествляется с n–вектор–функцией вида $z(t,x,u_1,u_2) = Q(t)x + R_1(t)u_1 + R_2(t)u_2 + q(t)$, где $n \times n$-матрицы $Q(\cdot), R_1(\cdot), R_2(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]$ и n–вектор $q(\cdot) \in C_n[0,\vartheta]$. Все такие неопределенности Z образуют множество $\mathcal{Z}$.

Функция выигрыша i-го игрока, задается квадратичным функционалом

$$\mathcal{J}_i(U,Z,t_0,x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \left(\sum_{j=1}^{2} u_i' D_{ij} u_j + z'Lz \right) dt \quad (i = 1,2).$$

Партия игры развертывается следующим образом. Игроки согласованно договариваются о выборе своих стратегий $U_i^* \in \mathfrak{A}_i$ ($i = 1,2$).

В результате образуется ситуация $U^* = (U_1^*, U_2^*) \in \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. Независимо от этого выбора формируется конкретная неопределенность $Z^* \in \mathcal{Z}$. При заданных стратегиях и неопределенности находится решение $x^*(t)$ уравнения (2). Затем строятся реализации выбранных игроками стратегий $u_i^*[t] \div u_i^*(t, x^*(t))$ $(i = 1, 2)$ и неопределенности $z^*[t] \div z^*(t, x^*(t), u_1^*[t], u_2^*[t])$. Далее, на четверках непрерывных вектор–функций

$$(x^*(\cdot), u_1^*[\cdot], u_2^*[\cdot], z^*[\cdot]) = \{x^*(t), u_1^*[t], u_2^*[t], z^*[t] | t \in [t_0, \vartheta]\}$$

вычисляются выигрыши игроков.

Формализация сильно гарантированного решения игры (1) основывается на «аналоге максимина», предложенном в [1] и примененном в [2] к статическим бескоалиционным играм при неопределенности.

Для предложенного решения (сильно гарантированного дележа), с помощью подходящей модификации метода динамического программирования найдены достаточные условия существования и выявлен алгоритм его построения. В модельном примере с помощью системы Maple построено сильно гарантированное решение.

[1] *Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E.* The Vector-Valued Maximin. N.Y. etc.: Academic Press, 1994.

[2] *Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.* Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, № 2. С. 3–45.

Управление потоками самолетов в трехвеерной схеме их слияния при наличии внеочередных самолетов

С. И. Кумков[1] , **М. И. Овчинников**[1] , **С. Г. Пятко**[2]

[1] *Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН*, e-mail: kumkov@imm.uran.ru

[2] *Санкт-Петербург*, ООО “Фирма НИТА”, e-mail: nita@nita.ru

Доклад посвящен разработке и исследованию алгоритмов управления потоками воздушных судов (ВС, самолетов) в зонах подхода и захода на посадку применительно к разрабатываемым в настоящее время [1–3] трехвеерным схемам бесконфликтного слияния потоков. Бесконфликтное слияние понимается как обеспечение заданного безопасного временнóго интервала между последовательными ВС путем задержки по времени последующего судна относительно предыдущего.

Требуемые задержки ВС реализуются как на специально разработанных схемах предварительной задержки в зоне подхода, так и на дугах ожидания перед снижением для захода на посадку.

Задача управления слиянием формулируется следующим образом: при заданных скоростных режимах движения потоков разработать алгоритмы расчета времени задержки каждого ВС в схеме предварительной задержки, а также моментов схода ВС с этой схемы и с дуг ожидания при обеспечении безопасности движения и минимума времени задержки каждого ВС на всей траектории его движения от точки входа на контроль до точки слияния потоков.

Управляемое движение ВС описывается стандартизованной системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Самостоятельным является вопрос об управлении внеочередным (аварийным) ВС. В этом случае требуется без дополнительной задержки быстро довести это ВС до точки слияния веерной схемы. Обычные (не аварийные) суда всех потоков обязаны пропустить такое ВС.

Алгоритмы управления очередью при появлении аварийного ВС удовлетворяют следующим критериям-требованиям: скорейший бесконфликтный вывод аварийного ВС в точку слияния; минимальная задержка остальных ВС, пропускающих внеочередное.

Разработанные алгоритмы сведены в диалоговую “систему-советчик” (Traffic Management Adviser) с диспетчером. Диспетчер имеет возможность как воспользоваться предлагаемой рекомендацией по управлению задержками судов, так и принимать решение самостоятельно с ручной коррекцией движения выбранного судна.

Предполагается компьютерная демонстрация функционирования разработанных алгоритмов в конкретной практической трехвеерной схеме одного из аэропортов Московской воздушной зоны в условиях высокой плотности прибывающих потоков ВС.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-01-07909.

[1] *Пятко С.Г.* Двухвеерная технология формирования интервалов посадки для аэродромов Московской воздушной зоны / ГосНИИ “Аэронавигация”. Москва, 2011.

[2] Веерные схемы (Система “Точка Слияния”) в условиях расширенного узлового диспетчерского района / Отчет, 2010. Eurocontrol Experimental Center. Русск. перев., ГосНИИ “Аэронавигация”. Москва, 2010.

[3] Point Merge Integration of Arrival Flows Enabling Extensive RNAV Application and Continuous Descent. Operation Services and Environment Definition / Report, July 2010. Eurocontrol Experimental Center, Bretigny-sur-Orge.
`http://www.eurocontrol.int/eec/gallery/content/public/document/ eec/report/2008/003_Point_Merge_OSED_V2.0.pdf`

Узкие шейки множеств разрешимости в модельных и практических задачах теории дифференциальных игр

С. С. Кумков, В. С. Пацко

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: sskumk@gmail.com, patsko@imm.uran.ru

Еще на раннем этапе развития теории дифференциальных игр Л.С. Понтрягиным была рассмотрена модельная задача «мальчик и крокодил» [1] с динамикой

$$\ddot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad x, y \in R, \quad |u| \leqslant \mu, \quad |v| \leqslant \nu,$$

фиксированным моментом окончания T и функцией платы

$$\varphi\bigl(x(T), y(T)\bigr) = \bigl(x(T) - y(T)\bigr)^2.$$

При исследовании этой задачи было обнаружено, что множество уровня W_{c^*} (построенное в пространстве *время* $\times$ *разностная одномерная эквивалентная координата*) функции цены игры, соответствующее некоторому критическому значению c^*, является бесконечным по времени, но в некоторый момент времени $t^* < T$ имеет вырожденное сечение $W_{c^*}(t^*)$ в виде точки. Таким образом, вблизи этого момента получаем «узкую шейку» множества уровня. Естественным является вопрос: насколько типичным для дифференциальных игр являются задачи, в которых появляются узкие шейки множеств уровня функции цены?

Изучая класс задач, известный как «обобщенный контрольный пример Понтрягина» [2, 3]:

$$\begin{aligned}
&a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = u,\\
&b_m y^{(m)} + b_{m-1} y^{(m-1)} + \ldots + b_2 \ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_0 y = v,\\
&x, y \in R^2, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad \varphi\bigl(x(T), y(T)\bigr) = \bigl\|x(T) - y(T)\bigr\|^2,
\end{aligned}$$

авторы построили примеры [4], где для некоторых значений c^* множества уровня функции цены имеют узкие шейки, в том числе, и несколько узких шеек. При этом множества P и Q ограничений на управления игроков выбирались эллипсами.

Численное построение множеств уровня функции цены в таких примерах вызывает определенные трудности. По крайней мере, вблизи моментов узких шеек процедура попятных по времени построений должна осуществляться с весьма высокой точностью.

В практических задачах функция платы указанного выше вида имеет смысл промаха по геометрическим координатам в фиксированный момент окончания. Множество уровня функции цены, соответствующее некоторому значению c^*, совпадает с максимальным стабильным мостом, обрывающимся на множестве уровня функции платы, соответствующем тому же значению. Также это множество можно назвать множеством разрешимости игры с соответствующим уровнем промаха. Анализ геометрической структуры множеств разрешимости является весьма важным в прикладных задачах.

В докладе будут приведены примеры задач космического преследования, в линеаризованных постановках которых возникают множества разрешимости с одной или несколькими узкими шейками.

Обнаружены задачи, где невыпуклые сечения множеств разрешимости несвязны; при этом каждая компонента связности имеет свои узкие шейки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-07909.

[1] *Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.* Задача об убегании одного управляемого объекта от другого // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, № 4. С. 721–723.

[2] *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры // Международный конгресс математиков в Ницце, 1970: Докл. сов. математиков. М.: Наука, 1972. С. 248–257.

[3] *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх (учебное пособие). М.: Изд-во МГУ, 1984.

[4] *Kumkov S.S., Patsko V.S.* Phenomenon of narrow throats of level sets of value function in differential games // Contributions to game theory and management. Vol. VII: Collect. paps present. on the 7th Intern. Conf. SPb.: Graduate School of Management SPbSU, 2014. P. 159–180.

О применении принципа сравнения для построения невыпуклых оценок множеств достижимости кусочно–линейных систем

А. Б. Куржанский, П. А. Точилин

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК

e-mail: kurzhans@mail.ru, paultoch@mail.ru

Данная работа посвящена построению внешних и внутренних оценок множеств достижимости для управляемых систем с кусочно–линейной динамикой, порождаемой в каждый момент времени одной из подсистем, описываемых при помощи линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^{(i)} = A^{(i)}(t)x^{(i)} + B^{(i)}(t)u + C^{(i)}(t)v, \quad i = 1, ..., N, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Здесь $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор фазовых переменных, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управление, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ — помеха (неопределенность), матрицы $A^{(i)}(t)$, $B^{(i)}(t)$, $C^{(i)}(t)$ непрерывны по t. На управление u и помеху v наложены "жесткие", поточечные ограничения: $u = u(\pi) \in \mathcal{P}(t)$, $v = v(t) \in \mathcal{Q}(t)$, где $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$ — многозначные отображения, непрерывные по Хаусдорфу, принимающие выпуклые компактные значения, а π — *позиция системы.*

Фазовое пространство разбито на N частей $\Omega^{(k)}$ при помощи *гиперплоскостей переключений*

$$\mathcal{H}^{(j)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_x} : \left\langle x, c^{(j)} \right\rangle = \gamma^{(j)} \right\}, \; c^{(j)} \in \mathbb{R}^{n_x}, ||c^{(j)}|| = 1, \; j = 1, ..., M.$$

В $\Omega^{(k)}$ активной является подсистема с номером $i = k$. При переходе траектории из области $\Omega^{(i)}$ в область $\Omega^{(j)}$ происходит обязательное *переключение* (смена активной подсистемы). Моменты переключений становятся известны лишь в процессе расчета каждой конкретной траектории.

В данной работе решается задача построения множества достижимости [1] $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0)$, выпущенного из начального множества $\mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^{n_x}$ и содержащего все позиции системы в фиксированный момент времени t, которые можно достичь за счет выбора управлений, несмотря на действие помех. При отсутствии в системе помех множества достижимости кусочно–линейных систем могут не быть выпуклыми или связными. Для таких множеств характерна ветвящаяся структура [2]. При наличии помех структура указанных множеств может быть еще более сложной.

Для построения $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0)$ может быть использована вспомогательная *функция цены*

$$\mathcal{V}(t, x) = \min_{u(\cdot)} \max_{x(\cdot)} \left\{ \varphi(x(t_0), \mathcal{X}_0) \middle| v(\cdot), x(t) = x \right\},$$

где $x(\cdot)$ — компоненты всевозможных траекторий, выпущенных в обратном времени из конечной позиции $\{t, x, i\}$ ($x \in \Omega^{(i)}$) при фиксированном управлении $u(\cdot)$ и различных помехах $v(\cdot)$; $\varphi(x, \mathcal{X}_0)$ — гладкая функция, для которой $\{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : \varphi(\xi, \mathcal{X}_0) \leq 0\} = \mathcal{X}_0$. Функция цены связана со множеством достижимости следующим соотношением:

$$\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0) = \{x \in \Omega : \mathcal{V}(t, x) \leq 0\}.$$

Таким образом, поиск внешних или внутренних аппроксимаций множеств достижимости может быть сведен к построению нижних (соответственно верхних) оценок функции цены $\mathcal{V}(t, x)$.

В данной статье предлагается новый подход к решению задачи приближенного построения множеств достижимости, основанный на применении принципа сравнения [1], [3], а также непрерывных кусочно–квадратичных функций Ляпунова $\mathcal{W}(t,x)$, аппроксимирующих $\mathcal{V}(t,x)$. Приведенный в работе метод позволяет строить невыпуклые аппроксимации исследуемых множеств, выраженные через множества уровней кусочно–квадратичных функций цены.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №15-01-05950-а), а также при финансовой поддержке программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-2692.2014.1).

[1] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Birkhäuser, 2014.

[2] *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1523–1533.

[3] *Куржанский А.Б.* Принцип сравнения для уравнения типа Гамильтона-Якоби в теории управления // Труды института математики и механики. 2006. Т. 12. № 1. С. 173–183.

Аналитическое решение задачи аппроксимации выпуклых множеств

А. С. Лахтин
Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
e-mail: alexey.lakhtin@urfu.ru

В теории дифференциальных игр и теории оптимального управления важное значение имеют задачи аппроксимации множеств. Так, в работах [1, 2] множества достижимости аппроксимировались эллипсоидами и параллелепипедами. Данное исследование продолжает цикл работ [3, 4], посвященных задаче оптимального расположения двух выпуклых многогранников. В этих работах основу решения составляли численные субградиентные методы. В отличие от этих подходов, дающих приближенное решение, данное исследование обеспечивает поиск точного аналитического решения задачи.

Пусть заданы два выпуклых многогранника $A, B \in R^n$. Требуется переместить их так, чтобы минимизировать хаусдорфово расстояния между ними, которое, как известно, вычисляется по формуле $d(A, B) = \max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B}\|a-b\|\ ,\ \max_{b\in B}\min_{a\in A}\|a-b\|\}$.

Считая, что многогранник A неподвижен, а B перемещается с помощью параллельного переноса на вектор $x \in R^n$, имеем выпуклую функцию $F(x) = d(A, B + \{x\})$, точку минимума которой x^* требуется найти, т.е. $F^* = F(x^*) = \min_{x\in R^n} F(x)$.

Рассуждения для удобства проводятся для плоского случая, т.е. $A, B \in R^2$ – выпуклые многоугольники, но идея предлагаемого метода может использоваться и в пространствах большей размерности.

В работе [4] было доказано, что $\partial F(x) = \mathrm{co}\{L_A(x)\bigcup L_B(x)\}$, где $L_A(x) = \{-l\ :\ \exists i \in I_A(x)\ :\ \langle l, a_i - x\rangle - \rho_B(l) = F(x),\ \|l\| = 1\}$ и $I_A(x) = \{i\ :\ \mathrm{dist}(a_i, B + x) = F(x)\}$. Множество $L_B(x)$ определяется аналогично.

Определим множества $L^*_A(x^*)$ и $L^*_B(x^*)$ как множества векторов, сонаправленных единичным векторам из множеств $L_A(x^*)$ и $L_B(x^*)$, соответственно, и имеющих длину $F^* = F(x^*)$.

Векторами типа $\mathcal{V}$ будем называть векторы из множества $L^*_A(x^*) \cup L^*_B(x^*)$, соединяющие вершины разных многоугольников. Векторами типа $\mathcal{W}$ будем называть векторы из множества $L^*_A(x^*) \cup L^*_B(x^*)$, соединяющие вершину одного многоугольника со стороной другого, причем вектор перпендикулярен этой стороне. Заметим, что любой вектор из $L^*_A(x^*) \cup L^*_B(x^*)$ относится либо к типу $\mathcal{V}$, либо к типу $\mathcal{W}$.

По определению, любой вектор типа $\mathcal{V}$ имеет вид $l_k = b_{j_k} + x^* - a_{i_k}$ и, значит, удовлетворяет равенству $F^* = \|l_k\| = \|b_{j_k} + x^* - a_{i_k}\| = \|x^* - (a_{i_k} - b_{j_k})\|$. Геометрически это соответствует расстоянию от точки с координатами x^* до точки с координатами $(a_{i_k} - b_{j_k})$.

Пусть вектор типа $\mathcal{W}$ представляет собой вектор от вершины a_{i_k} до стороны $(b_{j_k} + x^*), (b_{j_k+1} + x^*)$, тогда справедливо равенство $F^* = \|l_k\| = \frac{\|(x^* - (a_{i_k} - b_{i_k}))\ \times\ (b_{i_k+1} - b_{i_k})\|}{\|b_{i_k+1} - b_{i_k}\|}$. Геометрически это соответствует расстоянию от точки с координатами x^* до прямой, проходящей через точки с координатами $(a_{i_k} - b_{j_k}), (a_{i_k} - b_{j_k+1})$.

Таким образом, задача поиска точки минимума x^* сводится к перебору конечного числа вариантов. Пары вершин разных многоугольников дают вектора типа $\mathcal{V}$, а попарное рассмотрение вершин одного многоугольника со сторонами другого дает вектора типа $\mathcal{W}$. Во вспомогательном пространстве каждый раз требуется решить задачу оптимального размещения точки x^*, обеспечивающей минимальные расстояния до соответствующих точек и прямых. Другими словами, в каждом случае требуется найти центр окружности, проходящей заданные точки и касающейся заданных прямых.

В итоге, мы имеем алгоритм, который путем перебора конечного числа вариантов, зависящих от количества вершин заданных многоугольников, получает точное аналитическое решение поставленной задачи оптимизации.

[1] *Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.* Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289 № 1. С. 38–41.

[2] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.

[3] *Лахтин А.С., Ушаков В.Н.* Задача оптимизации хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми многогранниками // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 9. С. 60–67.

[4] *Ушаков В.Н., Лахтин А.С., Лебедев П.Д.* Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С.291–308.

Динамическая оптимизация на бесконечномерных многообразиях

Ю. С. Ледяев,
USA, Kalamazoo, Western Michigan University
e-mail: ledyaev@wmich.edu

Р. Кипка
Canada, Queens University

Задачи оптимального управления на многообразиях интенсивно изучались на протяжении последних четырех десятилетий. В первую очередь это связано с тем, что такие задачи появляются в важных приложениях в робототехнике, управлении ориентацией твердых тел и т.д., то есть в задачах, в которых естественные симметрии и связанные с ними законы сохранения позволяют моделировать движение управляемой системы, как движение на многообразии. Принцип максимума Понтрягина как необходимое условие оптимальности для таких систем также был хорошо известен и многократно использовался на протяжении этих десятилетий. Заметим однако, что доказательство принципа максимума для задач оптимального управления на многообразиях было получено только для систем специального вида при достаточно ограничивающих предположениях. В представленном докладе мы восполняем этот пробел в современной литературе и представляем общий подход к доказательству принципа максимума для задач динамической оптимизации на многообразиях, который основывается на нашем недавнем обобщении хронологического исчисления Аграчева и Гамкрелидзе и методах негладкого анализа для гладких многообразий.

К задаче динамической оптимизации гарантии при геометрических и интегральных ограничениях на возможности управления

Н. Ю. Лукоянов, Д. В. Корнев

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: nyul@imm.uran.ru

Рассматривается линейная динамическая система, подверженная воздействиям управления и помехи. Возможности управления стеснены геометрическими и интегрально-импульсными ограничениями. На помеху наложены только геометрические ограничения. В рамках теоретико-игрового подхода [1–3] исследуется задача об управлении по принципу обратной связи на минимакс нетерминального показателя качества — позиционного функционала в виде нормы, оценивающей совокупность отклонений движения системы в заданные моменты времени от заданных целевых точек. В силу геометрических ограничений на управление здесь не возникает импульсных постановок и связанных с ними трудностей (см., например, [4–6]). Однако, интегральные ограничения требуют дополнительной оптимизации по затратам ресурсов. В работе дана процедура для вычисления оптимального гарантированного результата управления, базирующаяся на рекуррентном построении выпуклых сверху оболочек подходящих вспомогательных функций. На ее основе методом экстремального сдвига [2, 3] построен закон управления, обеспечивающий результат, не хуже оптимального гарантированного результата с наперед заданной точностью. Приведен иллюстрирующий пример.

Развиваемые конструкции выпуклых сверху оболочек идейно восходят к стохастическому программному синтезу [2]. Они были разработаны для задач без интегральных ограничений (см., например, [3, 7–10]). Для задач с интегральными ограничениями подобные построения рассматривались в [11, 12] для случая терминального показателя качества. Доклад посвящен объединению конструкций из [10] и [12] для решения задач управления с интегральными ограничениями и нетерминальным показателем качества.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-01-31319-мол_а

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[2] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М: Наука, 1985.

[3] *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995.

[4] *Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.* К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. №5. С. 587–599.

[5] *Никольский М.С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. №6. С. 964–971.

[6] *Субботина Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 397–406.

[7] *Красовский А.Н.* Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 186–192.

[8] *Красовский Н.Н., Решетова Т.Н.* О программном синтезе гарантированного управления // Проблемы управления и теория информации. 1988. Т. 17, №6. С. 333–343.

[9] *Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.* Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, Вып. 6. С. 885—900.

[10] *Лукоянов Н.Ю.* К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 188–198.

[11] *Локшин М.Д.* О дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управляющие воздействия // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. №11. С. 1952–1961.

[12] *Лукоянов Н.Ю.* О задаче конфликтного управления при смешанных ограничениях на управляющие воздействия // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, №9. С. 1473–1482.

Условия, стимулирующие кооперацию, в задачах природопользования

В. В. Мазалов, А. Н. Реттиева
Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru, annaret@krc.karelia.ru

Для рационального использования возобновляемых ресурсов необходима разработка методов стимулирования кооперативного поведения игроков, при котором наносится минимальный ущерб окружающей среде. В работе исследована одна из схем поддержания кооперативного соглашения, достигнутого в начале периода планирования – динамически устойчивая процедура распределения дележа (ПРД) [2], [3]. Кроме динамической устойчивости для продолжительного существования достигнутых соглашений должны выполняться условия, стимулирующие кооперацию. Чтобы гарантировать игрокам больший выигрыш даже в случае расторжения кооперативного договора используется условие «защиты от иррационального поведения» [4]. В работе предлагается новое условие, которое побуждает игрока соблюдать кооперативное соглашение, достигнутое в начале периода планирования. Предложенное условие, названное условием, стимулирующим рациональное поведение на каждом шаге [1], легко проверяемо, а условие Янга является его следствием.

Рассмотрим теоретико–игровую модель эксплуатации ресурсов в дискретном времени. В игре участвуют игроки (страны или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на бесконечном промежутке времени. Динамика развития популяции описывается уравнением

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t)\,, \;\; x_0 = x\,, \tag{1}$$

где x_t – размер эксплуатируемой популяции в момент t, $u_t = (u_t^1, \ldots, u_t^n)$, u_t^i – стратегия (вылов) i-го игрока, $i = 1, \ldots, n$.

Каждый игрок заинтересован в максимизации бесконечной суммы дисконтированных «мгновенных» выигрышей:

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_i(u_t)\,, \tag{2}$$

где $g_i(u_t)$ – прибыль игрока i в момент времени t, δ – коэффициент дисконтирования, $0 < \delta < 1$.

Определение 1. Дележ $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ удовлетворяет *условию защиты от иррационального поведения* [4], если

$$\sum_{\tau=0}^{t} \delta^\tau \beta_i(\tau) + \delta^{t+1} V(i, t+1) \geq V(i, 0)$$

для всех $t \geq 0$, где $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ – динамически устойчивая ПРД [2], [3], $V(i, t)$ – выигрыш игрока i в равновесии по Нэшу.

Определение 2. Дележ $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ удовлетворяет *условию, стимулирующему рациональное поведение на каждом шаге* [1], если

$$\beta_i(t) + \delta V(i, t+1) \geq V(i, t)$$

для всех $t \geq 0$, где $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ – динамически устойчивая ПРД [2], [3], $V(i, t)$ – выигрыш игрока i в равновесии по Нэшу.

В работе схемы поддержания кооперативного договора применены для теоретико-игровых моделей управления биоресурсами в дискретном времени и проверено выполнение условий, стимулирующих кооперативное поведение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-01-00033_а

[1] *Мазалов В.В., Реттиева А.Н.* Условия, стимулирующие рациональное поведение, в дискретных задачах управления биоресурсами // Доклады АН. 2010. Т. 432, Вып. 3. С. 308–311.

[2] *Петросян Л.А.* Устойчивость решений дифференциальных игр со многими участниками // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 1977. № 19. С. 46–52.

[3] *Петросян Л.А., Данилов Н.Н.* Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск: Изд. ТГУ, 1985.

[4] *Yeung D.W.K.* An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games // International Game Theory Review. 2006. V. 8, №. 4. P. 739–744.

Об устойчивом управлении системой уравнений фазового поля при полной и неполной информации

В. И. Максимов

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Рассматриваются две взаимно дополняющие игровые задачи о гарантированном позиционном управлении распределенной динамической системой, описываемой уравнениями фазового поля [1], в условиях полной и неполной информации о ее наблюдаемых состояниях. Уравнения характеризуют процесс отвердевания жидкого вещества в ограниченной пространственной области и описывается соотношениями вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\eta) + l\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\eta) = \Delta_L\psi(t,\eta) + (Bu(t))(\eta) - (Cv(t))(\eta),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\eta) = \Delta_L\varphi(t,\eta) + g(t,\eta,\varphi(t,\eta)) + \psi(t,\eta) \tag{1}$$

$$((t,\eta) \in Q = (t_0,\vartheta)\times\Omega)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial}{\partial n}\psi(t,\eta) = \frac{\partial}{\partial n}\varphi(t,\eta) = 0 \quad ((t,\eta) \in (t_0,\vartheta)\times\partial\Omega) \tag{2}$$

и начальным условием

$$\psi(t_0,\eta) = \psi_0, \quad \varphi(t_0,\eta) = \varphi_0 \quad (\eta \in \Omega). \tag{3}$$

Здесь $t \in [t_0,\vartheta]$ ($t_0 < \vartheta < \infty$) — переменная времени; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, где $n = 2, 3,$ — ограниченная пространственная область с гладкой границей $\partial\Omega$; B и C — линейные ограниченные операторы, действующие, соответственно, из банаховых пространств Y и Z в гильбертово пространство $H = L_2(\Omega)$ и преобразующие внешние воздействия $u(t) \in Y$ и $v(t) \in Z$, оказываемые на систему в каждый момент t, в результаты $(Bu(t))(\eta)$ и $(Cv(t))(\eta)$ их непосредственного влияния на динамику системы в этот момент в каждой точке $\eta \in \Omega$; Δ_L — оператор Лапласа, действующий на вещественные функции, определенные на Ω; l — положительная константа;

$g(t,\eta,\varphi) = a(t,\eta)\varphi + b(t,\eta)\varphi^2 - c(\eta)\varphi^3$, при этом $a(\cdot), b(\cdot) \in L_\infty(Q)$, $c(\cdot) \in L_\infty(\Omega)$, $c(\eta) \geq c > 0$ для п.в. $\eta \in \Omega$; $\partial/\partial n$ — обозначение производной вдоль нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к Ω; $(\psi_0, \varphi_0) \in H^2$ — состояние системы в начальный момент t_0, при этом $\psi_0, \varphi_0 \in W^2_\infty(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial n}\psi_0(\eta) = \frac{\partial}{\partial n}\varphi_0(\eta) = 0$ $(\eta \in \partial\Omega)$.

Качество решения $(\psi(\cdot), \phi(\cdot))$ оценивается значением

$$I(\varphi(\cdot), \psi(\cdot)) = \int_Q f(t, \eta, \psi(t,\eta), \varphi(t,\eta), \nabla\varphi(t,\eta))\, d\eta\, dt;$$

здесь ∇x — градиент вещественной функции x, заданной на Ω; вещественная функция $f(\cdot)$, определенная на $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, такова, что функция $(t,\eta) \mapsto f(t,\eta,x,y,x',y')$ измерима по Лебегу для любых $x, y \in \mathbb{R}$, $x', y' \in \mathbb{R}^n$, функция $(x,y,x',y') \mapsto f(t,\eta,x,y,x',y')$ липшицева при п.в. $(t,\eta) \in Q$ и для п.в. $(t,\eta) \in Q$ выполняется $|f(t,\eta,0,\ldots,0)| \leq c_0(t,\eta)$, где $c_0(\cdot) \in L_\infty(Q)$.

Мы рассматриваем два способа позиционного формирования управлений игроками: позиционные стратегии при полной информации и позиционные стратегии при неполной информации. Применяя позиционную стратегию при полной информации, в каждый момент выработки текущего значения управления игрок использует результат наблюдения текущей истории полного состояния $(\psi(t,\eta), \varphi(t,\eta))$ системы (1)–(3), применяя позиционную стратегию при неполной информации — результат наблюдения текущей истории лишь его компоненты $\varphi(t,\eta)$. Устанавливается, что решения задач при полной и неполной информации эквивалентны в смысле асимптотически гарантированных результатов. Решения основаны на методе экстремального сдвига и методе априори стабильных множеств из теории гарантированного позиционного управления [2,3] и используют конструкции устойчивого динамического обращения.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 14-11-00539).

[1] *Caginalp G.* An analysis of a phase field model of a free boundary // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1986. V. 92, Iss. 3. P. 205–245.

[2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[3] *Осипов Ю.С.* Избранные труды. М.: МГУ, 2009.

Успокоение системы осцилляторов с помощью обобщенного сухого трения

А.И. Овсеевич, А.К. Федоров

Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

e-mail: ovseev@ipmnet.ru, akf@rqc.ru

Управление колебательными системами является одной из важнейших задач теории оптимального управления. Классическим достижением является аналитическое построение управления по обратной связи (в форме синтеза) для быстрейшего успокоения одного линейного осциллятора [1]. С точки зрения канонической системы принципа максимума такая задача является вполне интегрируемой.

Предметом данной работы является более сложная задача управления системой из произвольного числа N линейных осцилляторов с различными собственными частотами ω_i:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = y_i, \\ &\dot{y}_i = -\omega_i^2 x_i + u, \quad |u| \le 1, \quad i = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{1}$$

которая, по-видимому, не является вполне интегрируемой, и поэтому аналитическое построение оптимального управления недостижимо.

Авторы не рассчитывают аналитически построить оптимальное управление, тем не менее задача гашения колебаний системы (1) остается актуальной. Стандартным способом гашения колебаний является использование трения. Прямолинейное использование закона Кулона приводит к векторному управлению $u_i = -\mathrm{sign} y_i$. Используемое нами *скалярное* управление является обобщением сухого трения в том смысле, что имеет вид

$$u = -\mathrm{sign} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i, \tag{2}$$

где λ_i — некоторые коэффициенты. Управление такого типа возникло в авторских работах [2, 3] на основе исследования асимптотического поведения областей достижимости системы (1).

Хорошо известно, что использование сухого трения, хотя и способствует гашению колебаний, может не приводить к полной остановке системы: возникают зоны застоя, в которых система не движется вовсе, несмотря на то, что терминальное множество еще не достигнуто. В [2,3] предложен подход к построению квазиоптимального управления, использующий комбинацию трех различных стратегий. При малых энергиях задача решается с помощью общих функций Ляпунова [3], тогда как при больших и промежуточных энергиях используется управление в виде обобщенного сухого трения.

Характерной чертой задач управления является разрывность правых частей дифференциальных уравнений движения. С тем же явлением сталкиваемся при изучении движения под действием сухого трения. Вопрос о существовании решений традиционно решается с помощью теории Филиппова существования решения дифференциальных включений [4]. Однако вопрос о единственности решения остается за рамками теории Филиппова, хотя интуитивно концепция движения подразумевает однозначную определенность траекторий системы законом управления.

В данной статье исследуется вопрос о существовании и единственности движения системы осцилляторов под действием управления в виде обобщенного сухого трения. Показывается как управление в виде обобщенного сухого трения следует из структуры асимптотического поведения областей достижимости. Центральным в данной статье является вопрос существования однозначно определенного движения под действием управления. Задача решается в рамках теории ДиПерны–Лионса (DiPerna–Lions) сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [5, 6]. В данной статье ограничиваемся только формулировкой теорем существования и единственности. Доказательства приведенных утверждений могут быть найдены в [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-08-00606 и №14-01-00476

[1] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

[2] *Fedorov A.K., Ovseevich A.I.* Asymptotic Control Theory for a System of Linear Oscillators / Preprint arXiv:1308.6090.

[3] *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Асимптотические оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // Докл. акад. наук. 2013. No 3. С. 266–270.

[4] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

[5] *DiPerna R.J., Lions P.L.* Ordinary Differential Equations, Transport Theory and Sobolev Spaces // Inventiones mathematicae. 1989. No 3. P. 511–547.

[6] *Ovseevich A.I.* Irregular Dynamic Systems According to R.J. DiPerna and P.L. Lions // Functional Analysis and Other Mathematics. 2012. No 1. P. 57–70.

О задаче преследования с фазовыми ограничениями в рекуррентных дифференциальных играх

Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: kma3@list.ru, solov_na@mail.ru

В пространстве R^k $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, D)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением [1]

$$x_i^{(l)} + a_{l-1}(t)x_i^{(l-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x_i = u_i,\ u_i \in V,$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_{l-1}(t)y^{(l-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y = v,\ v \in V.$$

Здесь $x_i, y, u_i, v \in R^k$, функции $a_1(t), \ldots, a_l(t)$ непрерывны на $[t_0, \infty)$, V — выпуклый компакт. В момент $t = t_0$ заданы начальные условия $x_i^{(q)}(t_0) = x_i^q$, $y^{(q)}(t_0) = y^q$, причем $x_i^0 - y^0 \notin M_i$ для всех i, где M_i — выпуклые компакты. Здесь и далее $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $q = 0, \ldots, l-1$, $z_i^q = x_i^q - y^q$.

Дополнительно предполагается, что убегающий E не покидает пределы выпуклого множества

$$D = \{z \in R^k \mid (p_j, z) \leqslant \mu_j,\ j = 1, \ldots, r\}$$

с непустой внутренностью, где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы R^k, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа. Преследователи используют квазистратегии. Условие поимки — $x_i(\tau) - y(\tau) \in M_i$ при некоторых i, τ.

Обозначим через $\varphi_q(t,s)$ $(t_0 \leqslant s \leqslant t)$ — решение задачи Коши

$$w^{(l)} + a_{l-1}(t)w^{(l-1)} + \cdots + a_1(t)w = 0,$$

$$w^{(j)}(s) = 0,\ j \neq q,\ w^{(q)}(s) = 1.$$

Пусть далее $\xi_i(t) = \sum\limits_{j=0}^{l-1} \varphi_j(t,t_0) z_i^j$, $\eta(t) = \sum\limits_{j=0}^{l-1} \varphi_j(t,t_0) y^j$,

$$F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| ds,\ O_r(a) = \{z \in R^k \mid \|z-a\| \leqslant r\},$$

$$\lambda(v,\mu,b_i) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda\mu(b_i - M_i) \cap V - v \neq \emptyset\},$$

$$G_i(t,v(\cdot),b_i) = \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \lambda(v(s), \mathrm{sign}\varphi_{l-1}(t,s), b_i) ds.$$

Лемма. *Пусть* $r = 1$ *и выполнены следующие условия:* 1) *функции* $\xi_i(t)$ *являются рекуррентными на*

$[t_0,\infty)$ *[2];* 2) *функция* $\eta(t)$ *ограничена на* $[t_0,\infty)$; 3) $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \infty$; 4) *существуют моменты* $\tau_i^0 \geqslant t_0$, *положительные числа* ε, δ *такие, что для всех* i *и всех* $h_i \in O_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ $h_i \notin M_i$ *и*

$$\min_{v\in V} \max\{\max_i \lambda(v,1,h_i), (p_1,v)\} \geqslant \delta,$$

$$\min_{v\in V} \max\{\max_i \lambda(v,-1,h_i), (-p_1,v)\} \geqslant \delta.$$

Тогда существует момент $T \geqslant t_0$ *такой, что для любого допустимого управления* $v(\cdot)$ *убегающего* E, *любых* $h_i \in O_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *существует номер* $m \in I$ *для которого* $G_m(T,v(\cdot),h_m) \geqslant 1$.

Определим число $T_0 = \min\{t \geqslant t_0 : \inf\limits_{v(\cdot)} \min\limits_{h} \max\limits_{i\in I} G_i(t,v(\cdot),h_i) \geqslant 1\}$.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы и существуют моменты* $\tau_i \geqslant T_0$ *такие, что выполнены условия:* 1) $\xi_i(\tau_i) \in O_\varepsilon(\xi_i(\tau_i^0))$ *для всех* i; 2) $\inf\limits_{v(\cdot)} \max\limits_{i} G_i(\tau_i, v(\cdot), \xi_i(\tau_i)) \geqslant 1$. *Тогда в игре* $\Gamma(n,D)$ *происходит поимка.*

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки в рамках базовой части.

[1] *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т. 2, М.: Наука, 1988.

[2] *Соловьева Н.А.* Групповое преследование в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина// Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 3. С. 83-89.

Сильно–динамически устойчивые решения в динамических кооперативных играх

Л. А. Петросян
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: decan@apmath.spbu.ru

Сильно–динамически устойчивые решения обладают тем важным свойством, что любое их оптимальное продолжение в подзадаче, начинающейся с некоторого промежуточного момента времени, вместе с первоначальным оптимальным поведением до этого момента является оптимальным во всей задаче. Разумеется, что когда решение определяется единственным образом (например, вектор Шепли) понятие сильной динамической устойчивости и просто динамической устойчивости или состоятельности во времени совпадают. К сожалению, в случае многозначных принципов оптимальности это места не имеет. Особенно наглядно это видно в случае, когда под решением игры понимается ядро. Нами предложены некоторые новые подходы к построению сильно–динамически устойчивых решений. Эти подходы базируются на использовании в определенном смысле локально–оптимальных решений при построении решения в целом. Разумеется, такой подход может не соответствовать классическому представлению об оптимальности, однако это несоответствие является по существу платой за требование сильной динамической устойчивости. В то же время для случая, когда в динамической кооперативной игре участвуют два или три игрока, предлагается способ построения сильно–динамически устойчивого ядра без потери в функционале качества, то есть при сохранении классического требования к кооперации, когда кооперирующиеся игроки получают максимальный суммарный выигрыш.

Метод характеристик для уравнения в частных производных первого порядка с запаздыванием и одношаговые численные методы решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений

В. Г. Пименов, М. А. Паначев

Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Уравнения в частных производных первого порядка методом характеристик сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям; если же в исходном уравнении имеется эффект запаздывания, аналогичный прием сводит уравнение к смешанному функционально-дифференциальному уравнению [1]. В докладе приводятся конструкции одношаговых многоэтапных методов (аналогов явных методов Рунге–Кутты) численного решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений с применением двумерной интерполяции вырожденными сплайнами. Исследуются порядки сходимости и приведены результаты численных экспериментов на тестовых примерах. Работа продолжает исследования [2–4].

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{du}{dt} = f(x, t, u(x,t), u_{x,t}),$$

здесь $u(x,t)$ — искомая функция, $x \in [a,b]$, $t \in [0,T]$, – независимые переменные, $u_{x,t} = \{u(x+\xi, t+s), -\eta \le \xi \le \eta, -\tau \le s \le 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t, зависящая также от пространственного аргумента из зоны влияния $[x-\eta, x+\eta]$, $\tau > 0$ — величина запаздывания, $\eta > 0$ — величина, характеризующая зону влияния. Заданы начальные и краевые условия, обеспечивающие существование и единственность задачи.

Проведем дискретизацию задачи. Пусть пространственный шаг $h > 0$ такой, что $\eta/h = K$ — целое и временной шаг $\Delta > 0$ такой, что $\tau/\Delta = m$ — целое. Обозначим через $x_i = a + ih \in [a-\eta, b+\eta], i = -K, \ldots, N+K$, через $t_j = j\Delta \in [-\tau, T], j = -m, \ldots, J$. Без ограничения общности будем считать, что $N = (b-a)/h$, $J = T/\Delta$. Сеткой назовем набор таких пар $\{x_i, t_j\}$. Приближения функции $u(x_i, t_j)$ в узлах сетки будем обозначать u_j^i. Дискретным влиянием (двумерной предысторией модели) для узла $\{x_i, t_j\}$ назовем набор значений $\{u_l^n\}_j^i = \{u_l^n,\ i-K \leqslant n \leqslant i+K,\ j-m \leqslant l \leqslant j\}$.

Сконструируем семейство методов

$$u_{j+1}^i = u_j^i + \Delta \sum_{l=1}^{k} \sigma_l\, h_l(u_j^i, v_{x_i,t_j}),\ i = 1, \ldots, N-1,\ j = 0, \ldots, J-1,$$

$$h_1(u_j^i, v_{x_i,t_j}) = f(x_i, t_j, u_j^i, v_{x_i,t_j}),$$

$$h_l(u_j^i, v_{x_i,t_j}) = f(x_i, t_j + a_l\Delta, u_j^i + \Delta \sum_{n=1}^{l-1} b_{ln} h_n(u_j^i, v_{x_i,t_j}), v_{x_i,t_j+a_l\Delta}),$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями. Здесь v_{x_i,t_j} — результат интерполяции по дискретному влиянию.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-01-00089 и Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ, соглашение №02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.

[1] *Мышкис А.Д.* Смешанные функционально–дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5–120.

[2] *Пименов В.Г., Паначев М.А.* Численные алгоритмы и программы для решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Теория управления и математическое моделирование. Труды конференции. Ижевск, 15 – 18 мая 2012 / Изд. ИжГТУ. С. 60–61.

[3] *Пименов В.Г., Паначев М.А.* Решение уравнения переноса с запаздыванием путем использования численных методов для смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5-2. С. 2637–2638.

[4] *Panachev M.A.* Startingless multistep methods approach for the numerical solution of the mixed functional differential equations // American Institute of Physics. Conference Proceeding. 2014. Vol. 1631. P. 224–229.

О дифференциальных играх для систем нейтрального типа

А. Р. Плаксин, Н. Ю. Лукоянов
Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

Статья посвящена развитию теории дифференциальных игр [1–3] для функционально–дифференциальных систем нейтрального типа. Рассматривается дифференциальная игра на конечном промежутке времени, в которой движение конфликтно–управляемой динамической системы описывается при помощи функционально–дифференциальных уравнений нейтрального типа в форме Дж. Хейла [4]. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Качество процесса управления определяется показателем, который оценивает историю движения системы, сложившуюся к терминальному моменту времени. Игра формализуется в классе стратегий управления с поводырем в рамках позиционного подхода [1–3]. Для доказательства существования цены и седловой точки игры вводится аппроксимирующая дифференциальная игра в классе чистых позиционных стратегий, в которой движение конфликтно–управляемой системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями высокого порядка, а показатель качества является терминальным. Показано, что цена аппроксимирующей дифференциальной игры в пределе дает цену исходной игры, при этом оптимальные стратегии в исходной дифференциальной игре могут быть построены на основе использования в качестве поводырей оптимальных движений аппроксимирующей дифференциальной игры. Развиваемый способ аппроксимации функционально–дифференциальных систем при помощи систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка восходит к работам [5–7]. Подобные аппроксимации, их обобщения и приложения к различным задачам рассматривались, например, в работах [8–10], в том числе, в [9,10] — для уравнений нейтрального типа. Обоснование сходимости используемой аппроксимации для достаточно общих классов конфликтно–управляемых функционально–дифференциальных систем нейтрального типа дано в [11].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (14-01-31319 мол_а).

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[2] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

[3] *Осипов Ю.С.* К теории дифференциальных игр систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35, Вып. 5.

[4] *Hale J.K., Cruz M.A.* Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems // Ann. Mat. Pura Appl. 1970. 85(1). P. 63–81.

[5] *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.

[6] *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.

[7] *Куржанский А.Б.* К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. С. 2094–2107.

[8] *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 2. С. 202–209.

[9] *Опарин Н.П.* Об аппроксимации систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения с отклоняющимися аргументами. 1979. Т. 11. С. 52–60.

[10] *Kunisch K.* Approximation Schemes for Nonlinear Neutral Optimal Control Systems // J. Math. Anal. Appl. 1980. Vol. 82. P. 112–143.

[11] *Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.* Об аппроксимации нелинейных конфликтно-управляемых систем нейтрального типа // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 204-217.

Задачи на экстремум и дифференциальные включения с неограниченной правой частью

Е. С. Половинкин

Долгопрудный, Московский физико-технический институт

e-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

Рассмотрены дифференциальные включения с неограниченной правой частью, удовлетворяющей условию измеримо-псевдолипшицевости. Для таких дифференциальных включений получены теорема существования решений задачи Коши с оценками уклонения от начального приближения и теорема о релаксации, т.е. обобщение теорем А. Ф. Филиппова и А. Ф. Филиппова–Т. Важевского на случай неограниченной правой части и в банаховых пространствах. Также доказаны некоторые свойства множества решений таких дифференциальных включений, являющиеся обобщением классических теорем о непрерывной зависимости и о дифференцировании решений по начальным данным.

В докладе также излагается прямой метод исследования оптимизационных задач в банаховых пространствах с дифференциальными включениями с неограниченной правой частью. Метод состоит в том, что любое дифференциальное включение в окрестности испытуемой траектории приближается более простым дифференциальным включением, график правой части которого является выпуклым конусом, измеримо зависящим от времени. Для получения необходимых условий оптимальности изучены полярные конусы к множествам решений дифференциального включения, график правой части которого является выпуклым замкнутым конусом.

В результате получены необходимые условия оптимальности в ряде оптимизационных задач с дифференциальными включениями указанного вида [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-01-00295а

[1] *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит. - 2014.- 524 с.

Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами

Л. И. Родина
Ижевск, Удмуртский государственный университет
e-mail: box0589@udmnet.ru

Исследуются инвариантные множества управляемых систем с импульсными воздействиями, параметризованных метрической динамической системой. Такими системами описываются различные стохастические модели популяционной динамики, экономики, квантовой электроники и механики. В работах [1], [2] получены условия существования инвариантных множеств для множества достижимости системы и условия асимптотического приближения решений системы к заданному множеству.

Приведем результаты исследований уравнений со случайными коэффициентами, которые как представляют самостоятельный интерес, так и служат для изучения поведения решений управляемой системы такого же вида. Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\dot z = q(h^t\sigma, z),\ t\neq\tau_k(\sigma),\ \Delta z\big|_{t=\tau_k(\sigma)}=\ell(h^t\sigma, z),\ (t,\sigma,z)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R},\quad (1)$$

параметризованное метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, которая описана в работе [1].

Пусть задано множество $\Omega = \Omega_0\times\Omega_1\times\Omega_2$. Уравнению (1) поставим в соответствие вспомогательное детерминированное уравнение

$$\dot z = q(t, v_1, z),\quad t\neq k\vartheta,\quad \Delta z\big|_{t=k\vartheta}= \ell(v_2, z),\quad (t,z)\in\mathbb{R}^2,\qquad (2)$$

где $k = 1, 2, \dots, \vartheta > 0$, $(\vartheta, v_1, v_2)\in\Omega$. Предполагаем, что для каждого $v_1\in\Omega_1$ функция $(t,z)\to q(t,v_1,z)$ непрерывна, локально липшицева и $q(t,v_1,0)\geqslant 0$ при $t\geqslant 0$. Уравнение (2) можно рассматривать как частный случай уравнения со случайными коэффициентами (1) при фиксированном $\sigma = ((\vartheta, v_1, v_2), (\vartheta, v_1, v_2), \dots)\in\Sigma$.

Для каждого $v_2\in\Omega_2$ рассмотрим функцию $L(v_2,z)\doteq \ell(v_2,z)+z$ в предположении, что она непрерывная, неубывающая и $L(v_2,z)\geqslant 0$ для всех $z\geqslant 0$. Пусть $\omega\doteq(\vartheta,v_1,v_2)\in\Omega$, $\varphi(t,v_1,z)$ — решение уравнения $\dot z = q(t,v_1,z)$ при фиксированном $v_1\in\Omega_1$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, v_1, z) = z$. Введем в рассмотрение функцию

$$H(\omega, z) \doteq L\bigl(v_2, \varphi(\vartheta, v_1, z)\bigr) = \ell\bigl(v_2, \varphi(\vartheta, v_1, z)\bigr) + \varphi(\vartheta, v_1, z).$$

Напомним, что некоторое свойство выполнено с вероятностью единица, если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и это свойство верно для всех $\sigma \in \Sigma_0$. Далее буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины, через $z(t, \sigma, z_0)$ обозначим решение уравнения (1) при фиксированном $\sigma \in \Sigma$, удовлетворяющее начальному условию $z(\tau_0, \sigma, z_0) = z_0$.

Теорема 1. 1. *Если имеет место неравенство*

$$M\Bigl(\ln \sup_{z>0} \frac{H(\omega, z)}{z}\Bigr) < 0,$$

то для любого $z_0 \geqslant 0$ *равенство* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$ *выполнено с вероятностью единица.*

2. *Если* $M\Bigl(\ln \inf\limits_{z>0} \dfrac{H(\omega, z)}{z}\Bigr) > 0$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = +\infty$ *для любого* $z_0 > 0$ *с вероятностью единица.*

Теорема 2. *Предположим, что существуют множества* $\Omega_* \subseteq \Omega$ *и* $K = (0, \widetilde{z}_1) \cup (\widetilde{z}_2, +\infty)$ *такие, что* $\mu(\Omega_*) > 0$, $0 < \widetilde{z}_1 \leqslant \widetilde{z}_2$ *и*

$$\sup_{(\omega,z)\in Q} \frac{H(\omega, z)}{z} < 1, \quad \text{где} \quad Q = \bigl(\Omega_* \times (0, \infty)\bigr) \cup \bigl((\Omega \setminus \Omega_*) \times K\bigr).$$

Тогда для любого $z_0 \geqslant 0$ *равенство* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma, z_0) = 0$ *выполнено с вероятностью единица.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части.

[1] *Родина Л.И.* О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. № 4. С. 109–124.

[2] *Родина Л.И.* Об инвариантных множествах управляемых систем со случайными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 4. С. 109–121.

Структура и свойства решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

А. С. Родин
Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: alexey.rodin.ekb@gmail.com

Рассмотрим краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + H(t,x,D_x\varphi(t,x)) = 0, \quad \varphi(T,x) = \sigma(x), \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in R^n$, $D_x\varphi(t,x) = \left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_n}\right)$.

Обозначим $\Pi_T = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in R^n\}$.

Задача (1) рассматривается при следующих предположениях:

A1) функция $H(t,x,s)$ непрерывно дифференцируема по переменным t,x,s, вогнута по переменной s;

A2) функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема;

A3) выполнены условия подлинейного роста

$$||D_xH(t,x,s)|| \leq \alpha(1+||x||+||s||), \quad \alpha > 0,$$

$$||D_sH(t,x,s)|| \leq \beta(1+||x||+||s||), \quad \beta > 0.$$

При сделанных предположениях классическое решение задачи (1) может существовать лишь локально в некоторой окрестности краевого многообразия. Оно может быть построено локально с помощью метода характеристик Коши.

Выпишем характеристическую систему с краевыми условиями для задачи (1):

$$\dot{\tilde{x}} = D_sH(t,\tilde{x},\tilde{s}), \dot{\tilde{s}} = -D_xH(t,\tilde{x},\tilde{s}), \dot{\tilde{z}} = \langle \tilde{s}, D_sH(t,\tilde{x},\tilde{s})\rangle - H(t,\tilde{x},\tilde{s}) \tag{2}$$

$$\tilde{x}(T,\xi) = \xi, \quad \tilde{s}(T,\xi) = D_x\sigma(\xi), \quad \tilde{z}(T,\xi) = \sigma(\xi), \quad \forall\, \xi \in R^n. \tag{3}$$

Определение 1. Сингулярным множеством Q для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1) называется множество точек $(t,x) \in \Pi_T$, в которых функция φ недифференцируема.

Будем рассматривать решение в классе кусочно-гладких функций.

Теорема 1. *Пусть в задаче (1) выполнены условия A1–A3 и* $(t,x) \in Q$. *Тогда для того чтобы* $(t,x) \in M_{[k]}$, *где* $\dim M_{[k]} = n+1-k$, $k \in \overline{1,n}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали решения* $\tilde{x}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{s}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{z}(\cdot,\xi_i)$, *системы* (2), (3), $i \in \overline{1,r+1}$ *такие что, выполнено*

$$\tilde{x}(t,\xi_i) = x, \quad \tilde{z}(t,\xi_i) = \varphi(t,x), \quad \tilde{s}(t,\xi_i) \neq \tilde{s}(t,\xi_j), i \neq j, \forall i,j \in \overline{1,r+1}. \tag{4}$$

и ранг матрицы D *был равен* k, *где* $k \leq r$.

$$D = \begin{pmatrix} -(H_2 - H_1) & s_2^1 - s_1^1 & s_2^2 - s_1^2 & ... & s_2^n - s_1^n \\ -(H_3 - H_1) & s_3^1 - s_1^1 & s_3^2 - s_1^2 & ... & s_3^n - s_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -(H_{r+1} - H_1) & s_{r+1}^1 - s_1^1 & s_{r+1}^2 - s_1^2 & ... & s_{r+1}^n - s_1^n \end{pmatrix} \tag{5}$$

Здесь $(s_i^1, s_i^2, ..., s_i^n) = \tilde{s}(t,\xi_i)$, $H_i = H(t, \tilde{x}(t,\xi_i), \tilde{s}(t,\xi_i))$.

Теорема 2. *Если в задаче* (1) *выполнены условия* $A1-A3$, $(t,x) \in Q$, $(t,x) \in M_{[k]}$, *где* $\dim M = n+1-k$ *и* $1 \leq k \leq n$ *и гамильтониан* H *зависит только от переменной* s, *то для любых* $k+1$ *характеристик* $\tilde{s}(\cdot)$, *удовлетворяющих условию* (4), *и матрицы* D *вида* (5) *построенной на этих характеристиках и имеющей ранг* k, *не существует характеристики, также удовлетворяющей условию* (4), *которая представима в виде выпуклой комбинации этих* $k+1$ *характеристик.*

Определение 2. Сингулярной характеристикой называется характеристика, которая лежит в сингулярном множестве.

Теорема 3. *Если в задаче* (1) *выполнены условия* $A1-A3$, $(t,x) \in Q$, $(t,x) \in M_{[k]}$, *где* $\dim M_{[k]} = n+1-k$ *и* $1 \leq k \leq n$ *и гамильтониан* H *зависит только от переменной* s, *то не существует сингулярной характеристики.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-01-00168

[1] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2003.

[2] *Crandall G., Lions P.L.* Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // Trans. Amer. Math. Soc., 1983, Vol. 277, № 1. P. 1-42.

[3] *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013.

[4] *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А.* О структуре липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в терминах классических характеристик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, №3. С. 202-218

[5] *Колпакова Е.А.* Обобщенный метод характеристик в теории уравнений Гамильтона-Якоби и законов сохранения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, №5. С. 95-98.

Динамические режимы модели Калдора со случайным возмущением

Т. В. Рязанова, **Л. Б. Ряшко**

Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

e-mail: tatyana.ryazanova@urfu.ru

В работе рассматривается стохастическая интерпретация макроэкономической модели Калдора [1], описывающая взаимодействие дохода Y и капитала K

$$\dot{Y} = \alpha(I(Y) - \beta K - Y) + \varepsilon_1 \dot{w}_1,$$

$$\dot{K} = I(Y) - (\beta + 1)K + \varepsilon_2 \dot{w}_2.$$

Основное внимание уделяется зоне параметров, где детерминированная система бистабильна. В представляемой работе детально описаны зоны параметров, где наблюдается сосуществование равновесия и цикла, исследована устойчивость аттракторов в зависимости от параметров системы.

Под действием аддитивного шума в системе генерируются переходы из бассейна притяжения равновесия в бассейн притяжения предельного цикла и наоборот. Используя функцию стохастической чувствительности и основанный на ней метод доверительных областей [2], исследована чувствительность аттракторов к внешнему воздействию. Изучены критические интенсивности шума, соответствующие началом переходов, и генерирующие таким образом аттракторы, отличные от стохастических равновесий и циклов. В возникающих стохастических режимах исследован вклад стохастических равновесия и цикла.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-01-00181

[1] *Kaldor N.* A model of the trade cycle// Econ. J. 1940. № 50, С. 78–92.

[2] *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // Chaos 2011. № 21, С. 047514

Управление равновесием дискретной нелинейной стохастической системы при неполной информации

Л. Б. Ряшко

Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

e-mail: lev.ryashko@urfu.ru

Рассматривается динамика нелинейной стохастической системы с дискретным временем в окрестности равновесия. Для аппроксимации соответствующего стохастического аттрактора используется метод функций стохастической чувствительности. Проблема управления трактуется как задача синтеза наперед заданной стохастической чувствительности равновесия.

В случае полной информации эта задача была решена в [1]. В докладе рассматривается ситуация, когда полная информация о состоянии системы недоступна, а известны лишь некоторые зашумленные координаты состояния [2]. В этом случае могут быть использованы как статические, так и динамические регуляторы, использующие доступную информацию.

Для параметров регулятора получена система уравнений, связывающих их с элементами наперед заданной матрицы стохастической чувствительности. Вопросы управляемости и достижимости сведены к проблеме разрешимости этой матричной системы. Обсуждаются условия достижимости и алгоритм аналитического конструирования параметров регулятора.

Основные результаты предложенной теории иллюстрируются на модельных примерах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-08-00069

[1] *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Attainability analysis in the problem of stochastic equilibria synthesis for nonlinear discrete systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2013. Vol. 3. № 1. P. 5–16.

[2] *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973.

Вариационный принцип максимума для задачи оптимального управления с траекториями ограниченной вариации

О. Н. Самсонюк

Иркутск, Институт динамики систем и теории управления СО РАН

e-mail: samsonyuk.olga@gmail.com

В докладе будут представлены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме вариационного принципа максимума (ВПМ) для задачи оптимального импульсного управления с неотрицательной управляющей мерой при выполнении условия корректности Фробениуса.

Необходимые условия оптимальности импульсных процессов в форме вариационного принципа максимума впервые были получены в [1, 2] для задач оптимального импульсного управления, в которых:

а) отсутствуют ограничения на импульсное управление; б) выполняются условия Фробениуса для матрицы коэффициентов при импульсном управлении; в) импульсное управление представимо в виде распределения первого порядка сингулярности. Для таких задач было замечено, что расшифровка принципа максимума в редуцированной задаче, полученной при помощи так называемого нелинейного преобразования Гоха, приводит к более сильным необходимым условиям оптимальности первого порядка, чем обобщенный принцип максимума (ПМ). Эти условия были названы вариационным принципом максимума, они включали в себя, кроме условий соответствующего обобщенного ПМ, дополнительное вариационное условие — экстремальное условие на множествах вспомогательных функций, выполняющееся почти всюду по t. Соответствующий ВПМ тип локального минимума был назван импульсно-понтрягинским. Однако до недавнего времени импульсно-понтрягинский тип минимума не развивался для задач с траекториями ограниченной вариации, поскольку его описание было плотно связано с соответствующей редуцированной задачей, переход к которой невозможен при наличии ограничений на образ управляющей меры и (или) при невыполнении условия корректности (условия Фробениуса).

В докладе будет дано общее описание импульсно-понтрягинского минимума для задач оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной вариации, не связанное с редуцированной задачей. Известно, что задачам оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной вариации при помощи так называемой разрывной замены времени можно сопоставить эквивалентную вспомогательную задачу с измеримыми ограниченными управлениями. Импульсно-понтрягинский минимум не соответствует никакому из известных типов минимума, отвечающих стандартным понятиям локальной оптимальности во вспомогательной задаче, он расширяет понятие обобщенного понтрягинского минимума (аналога понтрягинского минимума во вспомогательной задаче) путем замены слабых вариаций дискретной составляющей импульсного управления на сильные.

ВПМ включает как составную часть все условия обобщенного ПМ [3, 4] и, дополнительно, экстремальное условие, имеющее вариационный характер. А именно, определяется специального вида функционал, параметрически зависящий от времени и заданный на множестве функций, описывающем все допустимые скачки траектории. Вариационное условие состоит в том, что почти всюду данный функционал должен достигать своего максимума на функциях, порожденных именно оптимальным процессом. Рассмотрены примеры, подтверждающие повышенную эффективность ВПМ в сравнении с ПМ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00699

[1] *Дыхта В.А.* Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных и особых режимов. Ирк. ВЦ СО АН СССР. Препринт № 7, 1991.

[2] *Дыхта В.А.* Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных процессов. Иркутск: изд-во ИГЭА, 1994.

[3] *Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. 2-е изд. М.: Физматлит, 2003.

[4] *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.

Исследование оптимальных траекторий в упрощенной постановке задачи о максимизации высоты подъема материальной точки

И. А. Самыловский
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
e-mail: ivan.samylovskiy@cs.msu.ru

В работе исследуется задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{s} = x, & s(0) = 0, & s(T) \to \max, \\ \dot{x} = u - \varphi(x) - g, & x(0) = 0, & 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ \dot{m} = -u, & m(0) = m_0, & m(T) \geq m_T, \end{cases} \tag{1}$$

являющаяся обобщением задачи, изученной в работе [2]. Здесь $s(t)$, $x(t)$, $m(t)$ — высота подъема, вертикальная скорость и масса объекта, функция сопротивления среды $\varphi(x)$ удовлетворяет свойствам $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ гладкая для всех x и дважды гладкая для $x \neq 0$, $\varphi'(x) > 0$,

$\varphi''(x) > 0$ для $x > 0$ и $\varphi''(x) < 0$ для $x < 0$. Упрощение задачи в виде отсутствия массы в уравнении для $x(t)$ и постоянства поля позволяет провести достаточно полный анализ принципа максимума Понтрягина в аналитической форме.

В работе установлено, что в случае фиксированного T экстремаль задачи (1) может принадлежать к одному из следующих типов:

- Тип Ia $u = (1, 0)$ на интервалах $(0, \hat{t})$, $(\hat{t}, T)$.
- Тип Ib $u = (1, u_{sing}, 0)$ на интервалах $(0, t_1)$, (t_1, t_2), (t_2, T).
- Тип IIa $u = (0, 1, 0)$ на интервалах $(0, t_1)$, (t_1, t_2), (t_2, T).
- Тип IIb $u = (0, 1, u_{sing}, 0)$ на интервалах $(0, t_1)$, (t_1, t_2), (t_2, t_3), (t_3, T).
- Тип III $u = (1, 0, 1, 0)$ на интервалах $(0, t_1)$, (t_1, t_2), (t_2, t_3), (t_3, T),

где $\hat{t} := \Delta m$.

Также приводится схема выбора типов траекторий для конечного анализа в зависимости от параметров задачи и анализ условий оптимальности для случая квадратичной $\varphi(x)$.

Дополнительно приводится анализ условий оптимальности в случае рассмотрения задачи (1) при нефиксированном T и ограниченном $T \leq T_*$ и рассматривается изменение структуры оптимальной траектории при переходе от системы, не содержащей g (система, рассмотренная в работе [2]), к системе с динамикой (1). Таким образом, строится семейство задач оптимального управления, являющихся промежуточными между простейшей задачей из [2] («тележка с трением») и одномерной версией задачи Годдарда.

[1] *Bonnans J.F., Martinon P., Trelat E.* Singular arcs in the generalized Goddard's Problem // JOTA. 2008. Vol. 139 № 2 pp. 439–461.

[2] *Dmitruk A., Samylovskiy I.* A simple trolley-like model in the presence of a nonlinear friction and a bounded fuel expenditure // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. 2013 Vol. 33 №2 pp. 135–137 33(2) 2013 135–147.

Построение обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби в модели молекулярной биологии

Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: subb@uran.ru, shag@imm.uran.ru

Рассматривается следующая задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями.

$$\partial u/\partial t + H(x, \partial u/\partial x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [-1; 1] \tag{1}$$

$$H(x,p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [-1; 1]. \tag{3}$$

Такая задача возникает в молекулярной биологии [1] для модели молекулярной эволюции Кроу – Кимуры. В [2, 3] введено понятие непрерывного обобщенного решения задачи (1)-(3) на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Pi}_T = [0; T] \times [-1; 1]$. Момент $T > 0$ определяется из условия продолжимости на отрезок $[0, T]$ выпущенных с начального многообразия решений характеристической системы

$$\begin{gathered} \dot{x} = H_p(x,p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \\ \dot{p} = -H_x(x,p) = f'(x) + (e^{2p} - e^{-2p})/2, \\ \dot{z} = pH_p(x,p) - H(x,p), \end{gathered} \tag{4}$$

где $H_x(x,p) = \partial H(x,p)/\partial x, \quad H_p(x,p) = \partial H(x,p)/\partial p$.

Показано, что обобщенное решение существует и может быть построено с помощью минимаксного [4] (и/или вязкостного [5]) решения вспомогательной задачи Дирихле.

Рассматривается задача о построении обобщенного решения задачи (1)-(3) заданной структуры. Указаны достаточные условия существования такого решения и предложена конструкция [6] его построения, базирующаяся на методах вариационного исчисления и динамического программирования.

Исследуются свойства характеристической системы (4), которые используются при построении обобщенного решения задачи (1)-(3) заданной структуры. Проведено численное моделирование.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-01-00168

[1] *Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution //Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. Vol. 78, №. 4, 041908.

[2] *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.

[3] *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана. Екатеринбург: РИО, УрО РАН, 2013.

[4] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.

[5] *Crandall M.G., Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, №. 1. P. 1–42.

[6] *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана с непродолжимыми характеристиками // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 247–257.

Регуляризованный принцип максимума Понтрягина как инструмент для решения неустойчивых задач оптимального управления

М. И. Сумин
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
e-mail: m.sumin@mail.ru

Хорошо известно, что различные проявления некорректности возникают уже в “самых простых” по виду оптимизационных задачах и проявляются в фактах неустойчивости их решений при возмущении исходных данных (см., например, [1, 2]). Указанная неустойчивость порождает, соответственно, и “неустойчивость” классических условий оптимальности в том смысле, что формально выделяемые ими оптимальные элементы в возмущенных задачах могут быть сколь угодно далеки от оптимальных элементов невозмущенных задач при сколь угодно малых возмущениях последних. Сказанное выше в полной мере относится как к самим задачам оптимального управления, так и к классическим для них условиям оптимальности – принципу Лагранжа и принципу максимума Понтрягина. В докладе обсуждается как можно преодолевать проблемы неустойчивости классических условий оптимальности в задачах оптимального управления распределенными системами на пути применения теории двойственной регуляризации [1, 2] и одновременного перехода к понятию минимизирующей последовательности допустимых элементов как основному понятию оптимизационной теории. В качестве базовой рассматривается выпуклая задача оптимального управления, в том числе и граничного, с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства для параболического дивергентного уравнения

$$f(\pi) \to \min,\ g_1(\pi)(x,t) = h(x,t),\ g_2(\pi)(x,t) \le 0,\ (x,t) \in Q, \qquad (1)$$

где $\pi \equiv (u,w) \in \mathcal{D}$ — пара управлений, $f : \mathcal{D} \to R^1$ – непрерывный выпуклый функционал качества, $g_1(\pi)(x,t) \equiv \varphi_1(x,t)z[\pi](x,t)$, $g_2(\pi)(x,t) \equiv \varphi_2(x,t,z[\pi](x,t))$, $\varphi_1,\ h \in L_\infty(Q)$, $\varphi_2 : Q \times R^1 \to R^1$ — измеримая по x,t и выпуклая по z функция, $Q \subset \overline{Q}_T$, $Q = \mathrm{cl}\ \overset{\circ}{Q}$, $\mathcal{D} \equiv \{\pi \in L_\infty(Q_T) \times L_\infty(S_T) : u(x,t) \in U$ п.в. на $Q_T,\ w(x,t) \in W$ п.в. на $S_T\}$, $U,\ W \subset R^1$ — выпуклые компакты, $z[\pi] \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap$

$C(\overline{Q}_T)$ — решение третьей начально-краевой задачи

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z + u(x,t) = 0,$$

$$z(x,0) = v_0(x),\ x \in \Omega,\ \ \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x,t)z = w(x,t),\ (x,t) \in S_T,$$

в которой $a \in L_\infty(Q_T)$, $\sigma \in L_\infty(S_T)$, $v_0 \in C(\overline{\Omega})$ — заданные функции.

Центральное внимание в докладе уделяется обсуждению получаемых на основе соответствующего варианта метода двойственной регуляризации [3] регуляризованных или, другими словами, устойчивых секвенциальных недифференциального принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления (1). Они представляют собою необходимые и достаточные условия устойчивого конструирования минимизирующих последовательностей в этой задаче. Другими словами, они, являясь регуляризирующими алгоритмами, представляют собою инструменты устойчивого решения задачи (1), а также сводящейся к ней неустойчивой обратной задачи, например, в случае $f(\pi) \equiv \|u\|^2_{2,Q_T} + \|w\|^2_{2,S_T}$, $\varphi_1(x,t) \equiv 1$, $\varphi_2 \equiv 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части госзадания в 2014-2016 гг. (код проекта 1727), а также при поддержке гранта в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

[1] *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.

[2] *Сумин М.И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, № 1. С. 25–49.

[3] *Сумин М.И.* Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управлении с фазовыми ограничениями // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, 16-19 июня 2014 г.). 2014. М.: Изд-во ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, С. 796–808.

Построение нелинейного регулятора при наличии комплексно–сопряженных пар собственных значений

А. М. Тарасьев, А. А. Усова

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: tam@imm.uran.ru, anastasy.ousova@gmail.com

В рамках теории экономического роста [2] рассматривается модификация модели оптимизации продуктивности природных ресурсов [4] включением в нее капитала как основного производственного фактора. Предполагается, что природные ресурсы, служащие еще одним производственным фактором, истощаются и их запас ограничен. Такое ограничение штрафуется естественным механизмом ценообразования, предполагающим гиперболический рост цен при истощении запасов. Ставится задача оптимального управления по максимизации интегрального индекса потребления, основополагающего в моделировании инвестиционных процессов. В этой задаче траектории системы управляются инвестициями в капитал и инвестициями в новые технологии и дематериализацию экономики, направленными на повышение ее продуктивности. С точки зрения постановки проблема классифицируется как задача оптимального управления на бесконечном интервале времени со штрафной функцией на истощающиеся ресурсы.

Исследование задачи осуществляется в рамках принципа максимума Понтрягина [1], обсуждаются качественные свойства гамильтоновой динамики, исследуется характер установившегося состояния системы. Анализ собственных чисел матрицы Якоби, вычисленной в стационарной точке, показал, что якобиан имеет 2 пары комплексно–сопряженных собственных значений, одна из которых имеет отрицательную действительную часть, а вторая — положительную, и два действительных собственных числа противоположных знаков, т.е. $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < \lambda_3 < 0 < \lambda_4 < \mathrm{Re}(\lambda_{5,6})$.

Для данного случая модифицирован алгоритм построения нелинейного регулятора [3], осуществляющего стабилизацию гамильтоновой динамики в окрестности стационарной точки. Фазовый портрет стабилизированного решения представлен на рисунке 1.

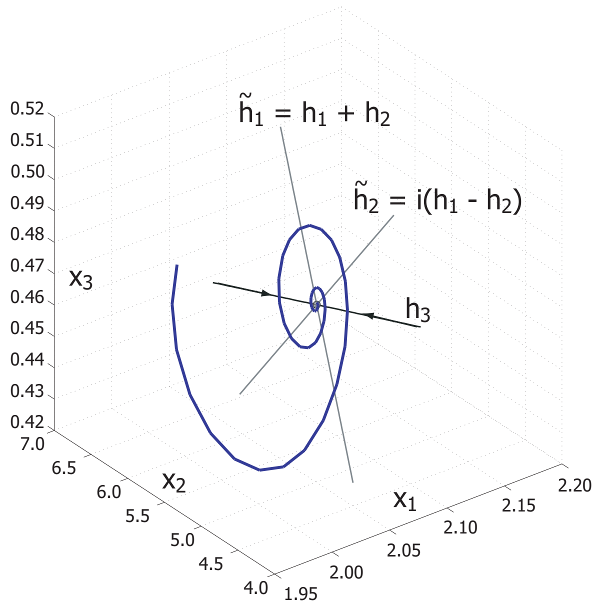

Рис. 1. Фазовый портрет стабилизированного решения

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований РАН №28, проектов УрО РАН №15-16-1-13, 15-7-1-22, РФФИ №14-01-00486-а и Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

[1] *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 257. С. 5–271.

[2] *Shell K.* Applications of Pontryagin's Maximum Principle to Economics // Mathematical Systems Theory and Economics. 1969. Vol. 1. P. 241-–292.

[3] *Тарасьев А.М., Усова А.А.* Стабилизация гамильтоновой системы для построения оптимальных траекторий // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 277. С. 257-–274.

[4] *Tarasyev, A., Zhu, B.* Optimal Proportions in Growth Trends of Resource Productivity. In Springer Monograph “Green Growth and Sustainable Development”, J. Crespo-Cuaresma, T. Palokangas, A. Tarasyev eds., Springer: Heidelberg, New York. 2013. P. 49–66.

Об одной задаче импульсного управления при наличии помехи

В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев
Челябинский государственный университет
e-mail: ukh@csu.ru, j748e8@gmail.com

Рассматривается управляемая система [1, 2]

$$dz = A(t)du + wf_1(t,\theta,v)dt, \quad \dot{\theta} = f_2(t,\theta,v), \quad z \in \mathbb{R}^n,\ \theta \in \mathbb{R}^q \qquad (1)$$

с импульсным управлением $u \in \mathbb{R}^n$ и помехой $|w| \le 1$, $v \in V$. Здесь $A(t)$ — непрерывная при $t \le p$ матрица соответствующей размерности, V – компакт в конечномерном пространстве.

Задано начальное состояние $t_0 < p$, $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t_0) \ge 0$, $\theta(t_0) \in \mathbb{R}^q$. Цель построения импульсного управления $u : [t_0, p] \to \mathbb{R}^l$ заключается в выводе в момент времени p вектора $z(p)$ в начало координат при любой измеримой реализации помехи $w : [t_0, p] \to [-1, 1]$, $v : [t_0, p] \to V$. На выбор импульсного управления накладывается ограничение

$$\int_{t_0}^{p} \|du(r)\| = \sup \sum \|u(r_{i+1}) - u(r_i)\| \le \mu(t_0).$$

Верхняя грань вычисляется по всем разбиениям точками r_i отрезка $[t_0, p]$, $\|\cdot\|$ - норма в $\mathbb{R}^l$.

Применяется процедура конечного числа коррекций импульсного управления.

Для любого вектора $\phi \in \mathbb{R}^n$ и любого числа $t < p$ опорная функция области достижимости импульсного управления

$$\left\{ z = \int_{p}^{t_0} A\left(r\right) du\left(r\right) : \int_{p}^{t} \|du\left(r\right)\| = 1 \right\} = U_p^t$$

равна

$$m(t,\phi) = \max_{r,u} \langle \phi, A(t)u \rangle, \quad t \le r \le p, \quad \|u\| = 1.$$

Здесь посредством $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем $t < p$, $\theta \in \mathbb{R}^q$, $\phi \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$B(t,\theta,\phi) = \sup \int_{t}^{p} \frac{|\langle \phi, f_1(r,\theta(r),v(r)) \rangle|}{m(r,\phi)} dr,$$

$$\dot{\theta}(r) = f_2(r, \theta(r), v(r)), \quad \theta(t) = \theta, \quad v(r) \in V. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть начальное состояние удовлетворяет неравенству*

$$|\langle \phi, z(t_0) \rangle| > m(t_0, \phi)(\mu(t_0) - B(t_0, \theta(t_0), \phi))$$

при некотором векторе $\phi \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует такая реализация помехи, что из этого начального состояния невозможно вывести вектор $z(p)$ в начало координат.

Следствие. *Пусть $0 \le \mu_0 < b(t_0, \theta(t_0)) = \sup_\phi B(t_0, \theta(t_0), \phi)$. Тогда для любого $z(t_0)$ существует такая реализация помехи, что из начального состояния невозможно попасть в начало координат.*

Условие, гарантирующее вывод вектора $z(p)$ в начало координат ищутся в следующем виде [3]:

$$\mu(t_0) \ge b(t_0, \theta(t_0)),\ z(t_0) \in (\mu(t_0) - b(t_0, \theta(t_0)))U^p_{t_0} + N(t_0, \theta(t_0)).$$

Здесь семейство множеств $N(t, \theta) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условию стабильности [2].

В одномерном случае $z \in \mathbb{R}$ функция $m(t, \phi) = m(t)|\phi|$ и $B(t, \theta, \phi) = b(t, \theta)$. Условию стабильности удовлетворяют множества $N(t, \theta) = 0$.

Теорема 2. *Для того, чтобы из начального состояния можно было перевести точку $z(p)$ в начало координат, необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$|z(t_0)| \le (\mu(t_0) - B(t_0, \theta(t_0)))m(t_0).$$

[1] *Красовский Н.Н.* Об одной задаче преследования // Прикл. мат. и мех. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 244–254.

[2] *Субботина Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для дифференциальной игры сближения–уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. мат. и мех. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.

[3] *Ухоботов В.И., Зайцева О.В.* Линейная задача импульсной встречи в заданный момент времени при наличии помехи // Тр. Ин–та математики и механики. 2010. Т. 16, № 1. С. 186–198.

О решении задач сближения нелинейных управляемых систем с компактной целью в фиксированный момент времени

В. Н. Ушаков, Н. Г. Лавров, А. В. Ушаков, Г. В. Паршиков
Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ushak@imm.uran.ru, aushakov.pk@gmail.com, grigory.parshikov@uran.ru

Рассматривается нелинейная управляемая система на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u); \tag{1}$$

здесь t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u \in P$ — вектор управления, где P — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$.

Предполагаются выполненными условия:

A. Вектор-функция $f(t, x, u)$ ограничена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$, и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдется такая константа $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \tag{2}$$

$$(t, x^{(i)}, u) \in D \times P, \quad i = 1, 2;$$

B. Существует такая константа $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|), \qquad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P; \tag{3}$$

C. Множество $F(t, x) = f(t, x, P)$ выпукло при любых $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве, $f(t, x, P) = \{f(t, x, u) \colon u \in P\} \subset \mathbb{R}^n$.

Наряду с системой (1) задан компакт $M \subset \mathbb{R}^n$.

В докладе рассматриваются следующие задачи, относящиеся к сближению системы (1) с множеством M в момент времени ϑ и примыкающие к тематике работ [1–3].

Задача 1. *Требуется выделить в* $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ *множество* W *всех тех исходных позиций* (t_*, x_*) *системы* (1), *для каждой из которых существует допустимое управление* $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, *переводящее систему* (1) *в момент* ϑ *на* M *(т.е.* $x(\vartheta) \in M$ *для движения* $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ *системы* (1), *порожденного управлением* $u(t)$ *на* $[t_0, \vartheta]$*).*

Задача 2. *Пусть* $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. *Требуется выяснить, удовлетворяет ли* $x^{(0)}$ *включению* $(t_0, x^{(0)}) \in W$, *и построить допустимое управление* $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, *порождающее движение* $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$ *системы* (1), *для которого* $x^*(\vartheta) \in M$.

Из-за сложности задач затруднительно даже в относительно простых случаях эффективное аналитическое описание множества W в задаче 1. В связи с этим актуален вопрос о приближенном вычислении множества W. В докладе рассматривается вопрос о приближенном вычислении W. Множество W_a, аппроксимирующее множество W, выделяется в результате попятной (по времени) пошаговой процедуры. В докладе также представлена процедура построения разрешающего управления для позиций $(t_0, x^{(0)}) \in W^a$. Процедура основана на использовании пошаговых постоянных управлений, проявившихся ранее в процессе построения множества W^a.

В докладе приведены примеры моделирования задач управления механическими системами.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-13, а также при поддержке РФФИ (гранты 14-01-00486_а и 13-01-96055).

[1] Красовский Н.Н. Теория управления движением. — 1968. — С. 476.

[2] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — Наука, 1974. — С. 458.

[3] Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. К управлению линейной системой обобщенными воздействиями // Дифференциальные уравнения. — 1969. — Т. 5, N. 8. — С. 1360–1370.

Об одной оценке дефекта стабильности множеств в игровой задаче о сближении

В. Н. Ушаков, **А. Г. Малев**
Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ushak@imm.uran.ru, malevag@mail.ru

Доклад посвящен изучению свойства стабильности в игровой задаче о сближении конфликтно управляемой системы с компактным целевым множеством в фиксированный момент времени [1]. Основным предметом исследования является введенное ранее в работах [2, 3] понятие дефекта стабильности множеств в пространстве позиций конфликтно управляемой системы.

Понятие дефекта стабильности было введено в целях расширения концепции стабильности и в связи с тем, что довольно часто в процессе конструирования стабильных мостов мы получаем множество, не обладающее, вообще говоря, свойством стабильности. Свойство стабильности есть свойство слабой инвариантности множества в пространстве позиций относительно некоторого набора дифференциальных включений, связанного с динамикой системы. Эти наборы могут быть различными, но выделяют при этом в пространстве позиций одни и те же множества — стабильные мосты. Для расширения концепции стабильности оказалось удобным применение унификационных определений стабильности [4], базирующихся на унификационных наборах. В частности, можно использовать унификационные определения стабильности в инфинитезимальной форме [5].

Унификационные наборы дифференциальных включений, через которые выражены унификационные определения стабильности [4] и которые используются в настоящей работе, являются бесконечными. Проверить реально, является ли то или иное множество в пространстве позиций стабильным мостом, для сколько-нибудь нетривиальных систем невозможно. Такую проверку можно осуществить для некоторых довольно простых конфликтно управляемых систем (т. е. систем, имеющих простой гамильтониан), благодаря тому, что унификационный набор можно подменить эквивалентным ему с точки зрения свойства стабильности конечным поднабором дифференциальных включений.

Для произвольных конфликтно управляемых систем с непростой динамикой становится актуальной следующая задача. Пусть выбран некоторый конечный поднабор из унификационного набора дифференциальных включений и, допустим, сконструировано множество в пространстве позиций, слабо инвариантное относительно этого поднабора. Требуется оценить, в какой мере это множество обладает свойством стабильности, т. е. является слабо инвариантным относительно всего унификационного набора. Иными словами, требуется дать оценку сверху дефекта стабильности этого множества.

Настоящий доклад посвящен выводу одной из таких оценок дефекта стабильности и продолжает исследования [5, 6].

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект №15-16-1-13, а также при поддержке РФФИ (гранты 14-01-00486_а и 13-01-96055)

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

[2] *Ушаков В.Н., Малев А.Г.* К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.

[3] *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Об одном дополнении к свойству стабильности в дифференциальных играх // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2010. Т. 271. С. 299–318.

[4] *Красовский Н.Н.* К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.

[5] *Guseinov H.G., Subbotin A.I., and Ushakov V.N.* Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Problems Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 6. P. 405–419.

[6] *Ушаков В.Н., Гусейнов Х.Г., Латушкин Я.А., Лебедев П.Д.* О совпадении максимальных стабильных мостов в двух игровых задачах о сближении для стационарных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 219–240.

Построение сингулярных кривых в задаче Дирихле для уравнения типа эйконала в случае невыпуклого краевого множества

А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: uspen@imm.uran.ru

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$\min_{\nu\,:\,\|\nu\|\leqslant 1}\left(\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+1=0, u|_\Gamma=0. \tag{1}$$

Здесь $\|\nu\|=\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}$ — норма вектора $\nu=(\nu_1,\nu_2)$. Краевое условие определено на границе $\Gamma=\partial M$ замкнутого множества $M\subset\mathbb{R}^2$. Она задана уравнением $\Gamma=\gamma(t)$, где $\gamma\colon T\to\mathbb{R}^2$ — отображение числового интервала $T=(\bar t,\tilde t)$, $-\infty<\bar t<\tilde t<\infty$ на плоскость. У вектор-функции $\gamma(t)=\big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big)$ существуют производные до третьего порядка включительно. Кроме того, Γ является регулярной кривой и не имеет точек самопересечения.

Минимаксное решение $u=u(x,y)$ задачи (1) является функцией оптимального результата [1] соответствующей задачи об оптимальном быстродействии для случая круговой индикатрисы. Совпадение совокупностей множеств Лебега у функции оптимального результата [2] и обобщенного эйконала (фундаментального по С. Н. Кружкову [3] решения соответствующего уравнения геометрической оптики) позволяет исследовать задачу (1) как эволюцию волновых фронтов.

Предметом изучения являются псевдовершины краевого множества. Псевдовершины нужны для аналитического или численного конструирования ветвей сингулярного множества. При исследовании свойств множеств привлекаются диффеоморфизмы, применяется удобная при громоздких аналитических аппроксимативных построениях техника струй [4].

Еще одним из направлений работы является изучение свойств псевдопроизводной — обобщения классической производной, совпадающего в частном случае с симметрической производной Шварца [5]. Введение псевдопроизводной дает возможность описания свойств решения на сингулярной кривой соотношениями типа условий Ранкина–Гюгонио. Схожие конструкции при построении решений задачи Коши для уравнения гамильтонова типа рассматривались, например, в работе [6].

Основной результат исследования состоит в получении необходимых условий для псевдовершин краевого множества [7]. Условия выписаны в терминах стационарности кривизны и стационарности координатных функций, задающих границу множества. Приводятся результаты аналитического и численного построения сингулярных множеств и функции оптимального результата.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект №15-16-1-13, а также при поддержке РФФИ (гранты 14-01-00486_а и 13-01-96055).

[1] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.

[2] *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики. 2008. Т.14, №2. С.182–191.

[3] *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби типа эйконала, I. Матем. сборник, 1975. Т. 98, Вып. 3, С. 450–493.

[4] *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.

[5] *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М., Наука. 1974. 480 с.

[6] *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А.* О структуре локально липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в терминах классических характеристик // Труды Института математики и механики. 2009. Т. 15, №3. С. 202–218.

[7] *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Труды Института математики и механики, 2010. Т.16, №1. С. 171–186.

Раздельное оценивание геометрических ошибок и ошибок времени в замерах РЛС

А. А. Федотов

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: andreyfedotov@mail.ru

Рассматривается метод получения оценок систематических ошибок геометрического положения замеров РЛС (по результатам совместного наблюдения за воздушным движением) независимо от ошибок привязки замеров к единой шкале времени. Считается, что ни один из рассматриваемых радиолокаторов не является эталонным, а также нужно обойтись без высокоточной эталонной информации от спутниковых навигационных систем. Систематические ошибки должны определяться при совместной обработке замеров «соседних» РЛС за счет избыточности радиолокационных данных. Выявление систематических ошибок РЛС является одной из важных задач, решаемых в центрах управления воздушным движением (УВД), поскольку наличие таких ошибок напрямую может влиять на точность работы алгоритмов систем УВД и на их надежность в целом.

Предполагаем, что у РЛС, участвующих в наблюдении за воздушным движением в некоторой зоне УВД, есть неизвестные, но постоянные систематические ошибки по азимуту и по дальности. Совокупность замеров от каждой РЛС рассматривается как набор точек в геометрическом пространстве, соединяемых в ломаную линию (радиолокационный трек). При определенной геометрии треков движения наблюдаемых воздушных судов, а именно, при наличии разнонаправленных участков движения для получения оценок систематических ошибок можно не использовать время замеров.

Метод основан на геометрическом совмещении РЛС-треков на локальных участках движения [1]. Рассчитываются разностные векторы (или их составляющие) попарного расхождения РЛС-треков. Здесь достаточно наличие хотя бы двух РЛС. Для каждого участка движения по трекам от разных РЛС находится величина относительного расхождения треков в направлении, перпендикулярном рассчитываемому направлению движения (такое направление определяется с помощью метода главных компонент [2]).

Далее подбираются постоянные индивидуальные поправки к измерениям РЛС по азимуту/дальности при совместной обработке разностной информации по совмещению треков. Оптимизируемый критерий характеризует расхождение между фактической разностной информацией и компенсирующими разностными параметрами совмещения треков, возникающими за счет подбора поправок к замерам по азимуту/дальности. Для нахождения оптимума применяется метод покоординатного спуска. Полученные поправки по азимуту/дальности берутся со знаком минус в качестве оценок соответствующих ошибок положения радиолокационных замеров.

После учета систематических ошибок по азимуту/дальности, т.е. после совмещения треков по геометрическим координатам, выполняется оценка взаимного рассогласования по времени замеров от разных РЛС. Здесь искомые оценки вычисляются как среднее расхождение по времени для наборов пар точек на аппроксимирующих треках РЛС. Для формирования пар точек берутся, с одной стороны, замеры РЛС, и, с другой стороны, ближайшие точки на смежных аппроксимирующих треках РЛС.

При сложной модели ошибок РЛС по геометрическим координатам (когда есть зависимость ошибок от местоположения или параметров движения наблюдаемого объекта) относительные ошибки расхождения по времени могут быть получены при индивидуальной обработке локальных областей с пересекающимися трассами движения воздушных судов.

Демонстрируются оценочные расчеты на модельных и реальных данных наблюдений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-96055

[1] *Бедин Д.А., Иванов А.Г., Федотов А.А.* Геометрическое совмещение треков от нескольких РЛС, оценка систематических ошибок в замерах // XXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 26 - 28 мая 2014, Санкт-Петербург, Россия. С. 117–120.

[2] Метод главных компонент / Википедия. [2007—2015]. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Метод%20главных%20компонент (дата обращения: 31.01.2015).

Задача гарантированного управления трубкой траекторий нелинейной системы с неопределенностью

Т. Ф. Филиппова

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: ftf@imm.uran.ru

Рассматривается нелинейная управляемая система следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + f(x)d + u(t), \quad x \in R^n, \quad t_0 \le t \le T, \tag{1}$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 = E(a, B), \tag{2}$$

и измеримым управлением $u(t)$, стесненным ограничением

$$u(t) \in E(\hat{a}, \hat{Q}), \quad t_0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $a, \hat{a}, d \in R^n$; функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = x'\tilde{B}x$, матрицы B, $\tilde{B}$ и $\hat{Q}$ — симметрические и положительно определенные, множество $E(y, Y) = \left\{x \in R^n : (Y^{-1}(x-y), (x-y)) \le 1\right\}$ — эллипсоид в R^n с центром $y \in R^n$ и симметрической положительно определенной $n \times n$–матрицей Y.

Обозначим символом $\mathcal{U}$ класс всех допустимых измеримых управлений $u(\cdot)$ и символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (1)-(3) на промежутке $[t_0, T]$ при $x_0 \in X_0$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Трубку траекторий системы (1)-(3) при управлении $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим

$$X(t; u(\cdot)) = \bigcup \ \left\{x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \mid x_0 \in X_0\right\}, \ t_0 \le t \le T.$$

В работе рассматривается задача нахождения допустимого управляющего воздействия $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$, переводящего трубку траекторий системы (1)-(3) в заданный момент T в минимально возможную ϵ^*–окрестность некоторой фиксированной точки z фазового пространства R^n:

$$X(T; u^*(\cdot)) \subseteq B(z, \epsilon), \quad \epsilon^* = \min_{\epsilon}$$

(здесь $B(z, \epsilon)$ — шар в R^n радиуса ϵ с центром в точке z).

Решение задачи оптимального управления строится в рамках принципа максимума Понтрягина [1,2] и основано на технике эллипсоидального исчисления, развитой для решения задач управления и оценивания в рамках теории траекторных трубок управляемых динамических систем с неопределенностью и теории эволюционных уравнений многозначных состояний динамических систем в условиях неопределенности [3–5]. В построении оптимального управления использованы результаты и алгоритмы оценивания множеств достижимости управляемых систем и соответствующих дифференциальных включений с квадратичной нелинейностью, полученные ранее в [6]. Представлены примеры и результаты компьютерного моделирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-02368.

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[2] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[3] *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Basel: Birkhauser, 1997.

[4] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes, Theory and Computation. Systems & Control: Foundations & Applications, Volume 85, 2014. Basel: Birkhauser, 2014.

[5] *Kurzhanski A.B., Filippova T.F.* On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia, Progress in Systems and Control Theory, A.B. Kurzhanski, eds. Birkhauser, Boston, 1993. P. 22–188.

[6] *Филиппова Т.Ф.* Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. Ин-та мат. и механики УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009. № 4. Т. 15. С. 262–269.

Проблема Коши–Гельфанда и обратная задача для квазилинейного уравнения первого порядка

Г. М. Хенкин, А. А. Шананин

Paris, France, Universite Pierre et Marie Curie

e-mail: guennadi.henkin@imj-prg.fr

Долгопрудный, Московский физико-технический институт

e-mail: alexshan@yandex.ru

В работе рассматривается задача Коши для квазилинейного уравнения типа Римана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \varphi(t)\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$f(x,0) = f^0(x), \tag{2}$$

где $f^0(x)$ — непрерывная функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, такая, что $f^0(x) = \alpha^{\pm}$ при $\pm x \geq \pm x^{\pm}$. Будем для определенности считать, что $\alpha^- < \alpha^+$. Кроме того, предположим для простоты, что $f^0(x)$ принимает значения из отрезка $[\alpha^-, \alpha^+]$. Представляет большой интерес задача о точной асимптотике решения задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (2), изучавшаяся в работах Гельфанд, 1959; Кружков, Петросян, 1987; Хенкин, Шананин, 2014.

Предположим, что $\varphi(f)$ непрерывно дифференцируемая функция, производная которой имеет только изолированные нули. Положим

$$\Phi(u) = \int\limits_{\alpha^-}^{u} \varphi(y)dy, u \in [\alpha^-, \alpha^+].$$

Пусть $\Phi^{**}(u)$ — результат двух кратного применения преобразования Лежандра-Юнга-Фенхеля к функции $\Phi(u)$. Обозначим $S = [u \in [\alpha^-, \alpha^+] \,|\Phi^{**}(u) > \Phi(u)]$. Предположим для простоты, что

$$S = (\alpha_0^-, \alpha_0^+) \cup (\alpha_1^-, \alpha_1^+) \cup \dots \cup (\alpha_L^-, \alpha_L^+).$$

Обозначим

$$c_l = \frac{1}{\alpha_l^+ - \alpha_l^-} \int\limits_{\alpha_l^-}^{\alpha_l^+} \varphi(y)dy, l = 0, \dots, L. \tag{3}$$

Пусть $f\left(y_l^-(t),t\right)=\alpha_l^-$, $f\left(y_l^+(t),t\right)=\alpha_l^+$,

$y_l^-(t)=\arg\max\limits_y \int\limits_y^{x^++c_Lt}(f(x,t)-\alpha_l^-)dx,$

$y_l^+(t)=\arg\max\limits_y \int\limits_y^{x^++c_Lt}(f(x,t)-\alpha_l^+)dx.$

Определим параметры $d_l(t)$ по следующим формулам максвелловского типа

$$\int\limits_{y_l^-(t)}^{c_lt+d_l(t)}(f(x,t)-\alpha_l^-)dx+\int\limits_{c_lt+d_l(t)}^{y_l^+(t)}(f(x,t)-\alpha_l^+)dx=0.$$

Теорема. *Функции $d_l(t)=d_l(l=0,\ldots,L)$ не зависят от времени. Решение задач Коши (1), (2) имеет следующую асимптотическую структуру* $\left|\left|f(\cdot,t)-\tilde f(\cdot,t)\right|\right|_{L_1(\mathbb{R})}\to 0, t\to+\infty,$

$$\tilde f(x,t)=\begin{cases}\alpha^-, & \text{если } x<c_0t+d_0\\ \varphi^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{если } c_lt+d_l\le x<c_{l+1}t+d_{l+1}, l=0,\ldots,L-1\\ \alpha^+, & \text{если } x>c_Lt+d_L\end{cases}$$

где функция $\varphi(u)$ определена на дополнении к множеству S, а c_l соответственно по формулам (3).

Параметры d_l можно определить по начальным данным. Тот факт, что совокупность $d_l(l=0,1,\ldots,L)$ однозначно определяет асимптотику решения задачи Коши, позволяет утверждать, что соотношениями $d_l(t)=d_l(l=0,1,\ldots,L)$ исчерпывается система независимых законов сохранения. В постановке обратной задачи об описании начальных условий по асимптотике решения задачи (1), (2) можно рассчитывать только на восстановление динамики точек максвелла $\{\,c_lt+d_l|\,l=0,1,\ldots,L\}$. Такая задача возникает в астрофизике в рамках модели эволюции вселенной Зельдовича: по наблюдаемому распределению масс во вселенной охарактеризовать флуктуации масс после Большого Взрыва.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 14-07-00075)

О невырожденности принципа максимума в задачах управления на бесконечном промежутке с липшицевой функцией цены

Д. В. Хлопин

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Основным инструментом для построения необходимых условий оптимальности в задачах управления является принцип максимума Понтрягина. Для бесконечного промежутка принцип максимума может вырождаться: множитель Ланргранжа при целевой функции может стать равным нулю.

На данный момент предложено достаточно много дополнительных условий, гарантирующих невырожденность принципа максимума. Большая часть из них основана на тех или иных оценках полной вариации сопряженной переменной [1, Теорема 12.1], [3], [7], [6]; существуют и более общие условия такого типа: см. например [2], [4, Proposition 4]. Один из методов доказательства невырожденности основан на использовании условия асимптотической стационарности гамильтониана (Michel condition) [5]. Хотя само по себе это условие не гарантирует невырожденности принципа максимума, остается лишь проверить (или предположить), что функция цены существует и достаточно гладка по фазовой переменной, см. [9, Theorem 3.1], [1, Теорема 5.1].

С помощью условия трансверсальности из [4] можно показать, что для невырожденности принципа максимума достаточно липшицевости функции цены. А именно, определим для всякого b из некоторой окрестности Ω точки $b_* \in \mathbb{R}^m$ оптимальное значение $V_T(b)$ задачи

$$\begin{array}{rl} \text{минимизировать} & \displaystyle\int_0^T f_0(t,x,u)dt \\ \text{в условиях} & \dot{x} = f(t,x,u), \quad t \geq 0, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^m \\ & x(0) = b, \end{array}$$

здесь множество P замкнуто, функции f, f_0 вместе со своими производными по x измеримы по t, непрерывны по u, липшицевы по x, а f удовлетворяет условию подлинейного роста.

Теорема. *Пусть существует равномерный на* Ω *предел* V *функций* V_T *при* $T \to \infty$, *а* (x^*, u^*) *— слабо равномерно обгоняющий оптимальный процесс с условием* $x^*(0) = b_*$ *(достигает значения* $V(b_*)$*).*

Тогда, если функция V *липшицева, то для* (x^*, u^*) *найдется предельное [4] решение* (ψ^*, λ^*) *принципа максимума в нормальной форме (с* $\lambda^* = 1$*). Более того, при этом* $\psi^*(0) \in \partial_L(-V)(b_*)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00304.

[1] *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста// Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–271.

[2] *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions// Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 41–57.

[3] *Aubin J-P, Clarke F.H.* Shadow Prices and Duality for a Class of Optimal Control Problems// SIAM J. Control Optim. 1979. V.17 P.567-586.

[4] *Khlopin D.V.* Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem// Optimization. published online: 20 Oct 2014.

[5] *Michel P.* On the transversality condition in infinite horizon optimal problems// Econometrica. 1982. V.50. P.975-984.

[6] *Sagara N.* Value functions and transversality conditions for infinite-horizon optimal control problems// Set-Valued Var. Anal. 2010. V. 18. P. 1-28.

[7] *Seierstad A.* Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems// J. Optim. Theory Appl. 1999. V. 103. P. 201-230.

[8] *Seierstad A., Sydsæter K.,* Conditions implying the vanishing of the Hamiltonian at infinity in optimal control problems// Optim. Lett. 2009. V. 3. P. 507-512.

[9] *Ye J.J.* Nonsmooth maximum principle for infinite-horizon problems// J. Optim. Theory Appl. 1993. V. 76, P. 485–500.

Топологические свойства множеств притяжения в абстрактных задачах о достижимости

А. Г. Ченцов

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Рассматривается задача о построении множества притяжения (МП) в топологическом пространстве (ТП) при ограничениях асимптотического характера (ОАХ). Упомянутые ОАХ могут задаваться изначально, а могут возникать при последовательном ослаблении стандартных ограничений (краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения в задачах управления, неравенства — в математическом программировании). Так или иначе, возникает непустое семейство подмножеств пространства обычных решений (ОР), на основе которого и определяются ОАХ в виде требований на выбор ультрафильтра (у/ф), фильтра или направленности в множестве ОР; при дополнительных условиях достаточно использовать последовательности ОР, что на идейном уровне соответствует применению приближенных решений Дж. Варги. Само МП является асимптотическим аналогом области достижимости в теории управления.

Непосредственное построение МП связано со значительными трудностями и наиболее приемлемым представляется подход, связанный с использованием конструкций расширения. Существо подхода состоит в погружении множества ОР в пространство обобщенных элементов (ОЭ), оснащаемое той или иной топологией; требуется, чтобы целевой оператор исходной задачи с ОАХ допускал реализацию в виде композиции оператора погружения и непрерывного отображения в исходное ТП, что отвечает идее непрерывного продолжения данного целевого оператора. В рамках упомянутой конструкции основное МП допускает оценку снизу в виде непрерывного образа вспомогательного МП в пространстве ОЭ. Если последнее оказывается компактным, а ТП исходной задачи — хаусдорфовым, то оценка превращается в равенство, а, стало быть, нагрузка в части построения МП «перекладывается» на вспомогательное МП, которое играет роль множества допустимых ОЭ (обобщенных управлений). Как правило, оператор погружения выбирается таким, что ОР образуют всюду плотное множество в пространстве ОЭ, что в сочетании с компактностью данного пространства позволяет в ряде случаев получить конкретное представление множества допустимых ОЭ. Данная схема широко использовалась в задачах управления с геометрическими ограничениями, систематическое исследование которых было начато Л.С. Понтрягиным (отметим исследования Р.В. Гамкрелидзе). В игровых задачах подобные конструкции активно применялись Н.Н. Красовским, А.И. Субботиным и их учениками.

Теория расширений составляет важный раздел общей топологии; в связи с применениями «топологических» расширений напомним работу [1]. Особо отметим в этой связи компактификацию Стоуна–Чеха и расширение Волмэна, а также возможности, связанные с применением компактов Стоуна (пространство у/ф алгебры множеств). Схема применения компактификации Стоуна–Чеха в задаче о достижимости с ОАХ приведена в [2]. Ее последующие модификации связаны с применением (в качестве ОЭ) у/ф широко понимаемых измеримых пространств. Оказалось, что некоторые из упомянутых «топологических» модификаций конструкций расширения могут «улавливать» скрытые особенности асимптотических решений (при широком толковании ОАХ), дополняя более традиционные для задач прикладной математики варианты расширений и релаксаций. Это касается топологических свойств вспомогательных МП, что, в частности, было показано в [3], где исследовалось представление внутренности вспомогательного МП и вопросы, связанные с канонической замкнутостью последнего.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-01-07909.

[1] **Терпе Ф., Флаксмайер Ю.Ф.** О некоторых приложениях теории расширений топологических пространств и теории меры // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 5. С. 125–162.

[2] **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна–Чеха // Современная математика и ее приложения. Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005. Т. 26, с. 119–150.

[3] **Ченцов А.Г.** К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестник УдГУ. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 3. С. 90–109.

Многозначные отображения и их селекторы в игровых задачах динамики

А. А. Чикрий
Киев, Институт кибернетики НАН Украины
e-mail: g.chikrii@gmail.com

В теории динамических игр сближения известны подходы, вскрывающие структуру игры [1–4], а также методы, обеспечивающие гарантированный результат [1, 4, 5]. Среди последних первый прямой метод Л.С. Понтрягина [4] и метод разрешающих функций [5], в которых выбор допустимых управлений первого игрока осуществляется на основе теорем измеримого выбора.

Упомянутые методы тесно связаны между собой не только этим обстоятельством. Так в случае вырождения разрешающей функции, обращения в $+\infty$, метод разрешающих функций переходит в первый прямой метод. Ключевую роль в изучении игровых задач на основе разрешающих функций играют специальные многозначные отображения, построенные с помощью обратных функционалов Минковского [5] и являющиеся замкнутозначными и $L \times B$-измеримыми по совокупности переменных (время и управление второго игрока). Последнее обстоятельство обеспечивает возможность выбора $L \times B$-измеримых селекторов упомянутых многозначных отображений и, следовательно, их суперпозиционную измеримость [5].

В процессе игры реализуется накопительный принцип; качество игры первого игрока в каждый момент оценивается числовой разрешающей функцией и если интеграл от нее по времени достигает заданной величины, то игра заканчивается. Нечто подобное мы наблюдаем в спортивных играх. Естественность предлагаемого метода подтверждается и тем, что он дает полное обоснование параллельного преследования и сближения по лучу. В данной работе предлагается расширение метода разрешающих функций, состоящее в использовании вместо числовых — матричных разрешающих функций. Это существенно увеличивает возможности метода, что и иллюстрируется на модельных примерах игровых задач.

Результаты иллюстрируются на многочисленных модельных примерах игровых задач для систем с дробными производными Римана–Лиувилля, Капуто, Миллера–Росса, Хильфера, Грюнвельда–Летникова, с импульсными воздействиями и толчками, в частности, дается обоснование параллельного сближения в этой ситуации.

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1970. 420 с.

[2] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.

[3] *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

[4] *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 576 с.

[5] *Chikrii A.A.* Conflict–Controlled Processes. Boston–London–Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 424 p.

Дискретная динамическая модель двухуровневого минимаксного программного управления экономической безопасностью региона

А. Ф. Шориков

Екатеринбург, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

e-mail: afshorikov@mail.ru

В данном докладе на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,\mathrm{T}} = \{0, 1, \cdots, \mathrm{T}\}$ $(\mathrm{T} > 0)$ рассматривается дискретная динамическая система, которая состоит из $(n+1)$-го объекта ($n \in \mathbb{N}$; здесь и далее, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел). Динамика объекта I (основного объекта системы — региона), управляемого доминирующим игроком P, описывается векторным линейным дискретным рекуррентным уравнением вида

$$y(t+1) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t) + D(t)w(t), \; y(0) = y_0, \quad (1)$$

динамика объекта II_i (i-го вспомогательного объекта системы — i-го муниципалитета, $i \in \overline{1,n}$), управляемого i-м подчиненным игроком E_i, описывается следующим уравнением

$$x^{(i)}(t+1) = A^{(i)}(t)x^{(i)}(t) + B^{(i)}(t)u(t) + C^{(i)}(t)v^{(i)}(t) + D^{(i)}(t)w^{(i)}(t),$$

$$x^{(i)}(0) = x_0^{(i)}. \tag{2}$$

Здесь $t \in \overline{0, \mathrm{T}-1}$; $y \in \mathbb{R}^r$ — фазовый вектор объекта I — набор основных параметров, описывающих состояние экономической безопасности региона в момент времени t; $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{s_i}$ — фазовый вектор объекта II_i — набор основных параметров, описывающих состояние экономической безопасности i-го муниципалитета в момент времени t; $(r, s_i \in \mathbb{N}$; для $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^k$ — k-мерное векторное пространство, элементы которого будем представлять в виде вектор–столбцов, даже если из экономии места они записаны в строчку); $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и $v^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{q_i}$ — векторы управляющих воздействий (управлений) игроков P и E_i соответственно, стесненные заданными ограничениями

$$u(t) \in \mathrm{U}_1,\ v^{(i)}(t) \in \mathrm{V}_1^{(i)}(u(t)), \tag{3}$$

где множества U_1 и $\mathrm{V}_1^{(i)}(u(t))$ — конечные наборы векторов в пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^{q_i}$ соответственно; $v(t) = (v^{(1)}(t), v^{(2)}(t), \ldots, v^{(n)}(t)) \in \mathbb{R}^q$ — вектор управления обобщенного подчиненного игрока E, объединяющего всех подчиненных игроков E_i, $i \in \overline{1, n}$ $(q = \sum_{i=1}^n q_i \in \mathbb{N})$; в уравнениях (1) и (2) фигурируют действительные матрицы соответствующих размерностей. В уравнении (1), описывающем динамику объекта I, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор рисков (или помехи) для этого объекта, а в уравнении (2), описывающем динамику объекта II_i, $w^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ — вектор рисков (или помехи) для этого объекта, которые в каждый период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$ зависят от допустимой реализации управления игрока P и удовлетворяют соответствующим заданным ограничениям.

Игрок P совместно с объектами I и II_i, $i \in \overline{1, n}$, определяют доминирующий (региональный) или уровень управления I, а обобщенный подчиненный игрок E и управляемые им объекты II_i, $i \in \overline{1, n}$, образуют подчиненный (муниципальный) или уровень управления II для рассматриваемого процесса управления в дискретной динамической системе (1)–(3). Для каждого игрока описываются конкретные условия информационного обеспечения. Качество управления рассматриваемыми динамическими объектами на каждом уровне управления оценивается соответствующими им выпуклыми функционалами, которые определены на их терминальных (финальных) фазовых состояниях системы.

Для исследуемой динамической системы на основе работ [1], [2] предлагается экономико–математическая формализация в форме решения многошаговой задачи двухуровневого иерархического минимаксного программного управления экономической безопасностью региона при наличии рисков и предложена общая методика для ее решения. Отметим, что важной особенностью предлагаемой методики управления экономической безопасностью региона является то, что ее реализация позволяет сочетать интересы как региона в целом, так и образующих его муниципалитетов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-02368.

[1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[2] *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.

Игра простого преследования на компакте

О. О. Юферева

Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

e-mail: yufereva12@gmail.com

Становление теории игр преследования–убегания связано с работами Понтрягина Л.С., Пшеничного Б.Н., Черноусько Ф.Л., Петросяна Л.А., Петрова Н.Н., Азамова А.А. и их учеников.

Игру двух игроков, один из которых пытается «поймать» второго, принято называть игрой льва и человека. Изначально такая игра рассматривается на круглой арене и предполагает равные возможности игроков. Но даже такая постановка оказывается достаточно сложной – неизвестна оптимальная стратегия ни для одного из игроков, неизвестно время эпсилон–поимки (но доказано, что убегающий может избежать точной поимки).

Сейчас довольно часто исследуются вариации этой задачи – добавляются ограничения на возможности игроков или рассматриваются более сложные фазовые пространства. Так, работы [1,2] связаны с задачами робототехники и рассматривают довольно сложные стратегии игроков для поверхностей многогранников. Достаточность эпсилон–поимки объясняется тем, что столкновение роботов (имеющих размеры) — и есть эпсилон–поимка. В других применениях, скорее всего, эпсилон–поимка также будет являться важным результатом.

В статье [3] возможность эпсилон–поимки рассматривается в классе пространств, называемых CAT(0)-пространства (в них возможно рассматривать понятие кривизны многогранников), а в [4] приводится контрпример утверждению из [3] о том, что в игре с простым преследованием и дискретным временем на некоторой области CAT(0)-пространства преследователь всегда побеждает в том и только в том случае, если эта область – компакт . И вопрос о характеризации пространств с помощью игр остается открытым.

В данном докладе анонсируется следующий результат: в условиях равных возможностей игроков преследователь может гарантировать себе эпсилон–поимку на компакте с метрикой, где:
1. Для любых двух точек есть единственный отрезок геодезической их соединяющий.
2. Все геодезические конечны.
3. Все геодезические непрерывно зависят от концов.

[1] *Noori N. Isler V.* Lion and Man with Visibility in Monotone Polygons // The International Journal of Robotics Research. 2013.

[2] *Noori N., Isler V.* The Lion and Man Game on Convex Terrains // 2014.

[3] *Alexander S. Bishop R. Ghrist R.* Total curvature and simple pursuit on domains of curvature bounded above // Geometriae Dedicata. 2010.

[4] *Miroslav B.* Note on a compactness characterization via a pursuit game // Geometriae Dedicata. 2012.

[5] *Bollobas B. Leader I. Walters M.* Lion and Man — Can Both Win? // Israel Journal of Mathematics. 2012.

Viscosity methods for multiscale financial models with stochastic volatility

Martino Bardi, **Annalisa Cesaroni**
Daria Ghilli, **Andrea Scotti**
Dipartimento di Matematica, Università di Padova — Italy
e-mail: bardi@math.unipd.it, acesar@math.unipd.it, ghilli@math.unipd.it

Financial models describe the evolution of the price of an asset by a stochastic differential equation of the form

$$dX_t = f(X_t)dt + X_t\sigma dW_t,$$

where W_t is Brownian motion. In optimal portfolio optimisation the wealth evolves in a similar way with f and σ depending also on an admissible control process u_t. Models with stochastic volatility assume that $\sigma = \sigma(Y_t)$ depends on another stochastic process Y_t. Typically Y_t is a mean–reverting diffusion process driven by a Brownian motion correlated to W_t. About 15 years ago it was argued by various authors including Fouque, Papanicolaou, and Sircar [6] that the volatility process Y_t evolves at a faster time scale than the assets. This leads to models where $Y_t = Y_t^\epsilon$ depends on a small parameter $\epsilon > 0$ that are studied by methods of asymptotic analysis. A number of issues have been studied for such multiscale models. In [2] methods from the theory of viscosity solutions were first used to prove rigorously the convergence as $\epsilon \to 0$ in models such as Merton portfolio optimisation for a suitably scaled Ornstein–Uhlenbeck volatility process Y_t^ϵ. The analysis was based on the Hamilton–Jacobi–Bellman equation satisfied by the optimal expected wealth of the portfolio, where the terms involving ϵ appear as singular perturbations.

In this talk we present results on two problems related to this framework. The first is a multiscale model where the volatility process Y_t^ϵ follows an Ornstein–Uhlenbeck equation driven by a Lévy process with jumps, as proposed by the important paper of Barndorff–Nielsen and Shephard [4]. Here the H–J–B equation is integrodifferential. We get results comparable to the case of Gaussian noise by means of the ergodicity properties of the volatility process and viscosity methods for the H–J–B equation, see [3].

The second problem is inspired by [5] and concerns models with Gaussian noise, as in [2, 6], where the short maturity limit is analysed.

Here there are two small parameters, ϵ and δ, and we look for a large deviation principle, as in [5]. We discover three possible regimes that depend on the reciprocal speed of the parameters, and find rigorously the limit in all three cases. The results can be found in [1].

[1] *M. Bardi, A. Cesaroni, and D. Ghilli.* Large deviations for some fast stochastic volatility models by viscosity methods, to appear in Discrete Contin. Dyn. Syst., available at http://cvgmt.sns.it/people/bardi/

[2] *M. Bardi, A. Cesaroni, and L. Manca.* Convergence by viscosity methods in multiscale financial models with stochastic volatility, SIAM J. Finan. Math. 1 (2010), 230–265.

[3] *M. Bardi, A. Cesaroni, and A. Scotti.* Convergence in Multiscale Financial Models with Non–Gaussian Stochastic Volatility, to appear in ESAIM Control Optim. Calc. Var., available at http://cvgmt.sns.it/people/bardi/

[4] *O. E. Barndorff–Nielsen and N. Shephard.* Non–Gaussian Ornstein–Uhlenbeck–Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics, J. Royal Stat. Soc. B 63 (2001), 167–241.

[5] *J. Feng, J.-P. Fouque, and R. Kumar.* Small time asymptotic for fast mean–reverting stochastic volatility models, Annals Applied Probability 22 (2012), 1541–1575

[6] *J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, and R. Sircar.* Derivatives in financial markets with stochastic volatility, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

A domain decomposition method for second order Hamilton–Jacobi equations

S. Cacace
Rome, SAPIENZA Università di Roma
e-mail: cacace@mat.uniroma1.it

M. Falcone
Rome, SAPIENZA Università di Roma
e-mail: falcone@mat.uniroma1.it

Domain decomposition techniques have become popular in the numerical solution of partial differential equations arising in several applied contexts, e.g. fluid dynamics, electromagnetism, robotics, aeronautics, electrical and aerospace engineering.

Given a decomposition of a domain in subsets of manageable size and prescribed suitable transmission conditions at the interfaces or overlapping regions between the sub–domains, massive parallel computations can be performed exploiting the computing power of modern clusters of CPUs and/or GPUs.

In the first part of this talk, we review the *patchy domain decomposition* method, proposed by the authors in [1]. It is a parallel algorithm for the solution of deterministic optimal control problems, based on a semi–Lagrangian discretization of the corresponding first order Hamilton–Jacobi–Bellman equations:

$$\begin{cases} \max\limits_{a\in A} \{-f(x,a)\cdot\nabla u(x) - l(x,a)\} = 0 & x\in\Omega \\ u(x) = g(x) & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

where $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ is an open set, $A\subset\mathbb{R}^m$ is a compact set of admissible controls, $f:\Omega\times A\to\mathbb{R}^n$ is a vector field and $u:\Omega\to\mathbb{R}^+$, $l:\Omega\times A\to\mathbb{R}^+$, $g:\partial\Omega\to\mathbb{R}^+$ are scalar functions.

The main idea of the method is to compute first a solution of the equation on a grid which is coarse with respect to the actual (fine) grid. Then, an approximation of the optimal vector field associated to the underlying control problem is synthesized on the fine grid. Finally, a decomposition of the fine grid is dynamically build driven by the approximate optimal vector field, and the equation is solved in parallel on the corresponding patches. This pre–computation produces a rather complex subdivision of the computational box, but gives the fundamental property that each sub–domain is, up to an error, independent on the others. This feature allows for an efficient parallelization, since transmission conditions at the interfaces of the sub–domains can be completely avoided.

In the second part of the talk, we extend these techniques to stochastic optimal control problems, related to the following class of second order Hamilton–Jacobi–Bellman equations ([3]):

$$\begin{cases} \max_{a\in A}\left\{-\frac{1}{2} < \sigma(x,a)\sigma^T(x,a) : D^2u(x) > -f(x,a)\cdot\nabla u(x) - l(x,a)\right\} = 0 & x\in\Omega \\ u(x) = g(x) & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

where $\sigma : \Omega \times A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$ is the diffusion term associated to a d-dimensional Wiener process.

Due to the presence of diffusion, transmission conditions at the boundaries of the patches can no longer be avoided. Nevertheless, we show that, under suitable conditions on the discretization parameters and for sufficiently small values of the diffusion coefficient, the patchy method can still be effective. To this end, we need to suitably modify the semi–Lagrangian scheme underlying the original method and combine the parallelization with some techniques in the context of fast–marching–like methods for first order Hamilton–Jacobi equations ([2]). Some numerical tests in dimension two are presented, in order to show the features of the proposed method.

[1] *S. Cacace, E. Cristiani, M. Falcone, A. Picarelli.* A patchy domain decomposition method for a class of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. In: SIAM Journal on Scientific Computing. 2012. Vol. 34, No. 5, pp. A2625–A2649.

[2] *S. Cacace, E. Cristiani, M. Falcone.* Can local single–pass methods solve any stationary Hamilton–Jacobi–Bellman equation?. In: SIAM Journal on Scientific Computing. 2014. Vol. 36, No. 2, pp. A570–A587.

[3] *S. Cacace, M. Falcone.* A dynamic domain decomposition for the eikonal–diffusion equation. Accepted in: Fluid dynamics and electromagnetism: theory and numerical approximation, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S.

A Semi–Lagrangian scheme for second order mean field game problems

E. Carlini, **F. J. Silva**

Italy, Dip.Matematica, SAPIENZA Università di Roma
France, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Limoges
e-mail: carlini@mat.uniroma1.it, francisco.silva@unilim.fr

Mean Field Games (MFG) systems were introduced independently by [7] and [9] in order to model dynamic games with a large number of *indistinguishable small players*. In this model the asymptotic equilibrium is described by means of a system of two Partial Differential Equations (PDEs). The first equation, together with a final condition, is a Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) equation describing the value function of a *representative player* whose cost function depends on the distribution m of the entire population. The second equation is a Fokker–Planck (FP) equation which, together with an initial distribution m_0, describes the fact that m evolves following the optimal dynamics of the average player.

We consider the following second order *possibly degenerated* MFG system

$$\begin{aligned}
& -\partial_t v - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(t)\sigma(t)^\top D^2 v\right) + \frac{1}{2}|Dv|^2 = F(x, m(t)) && \text{in } \mathbb{R}^d \times]0,T[, \\
& \partial_t m - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(t)\sigma(t)^\top D^2 v\right) - \mathrm{div}\big(Dvm\big) = 0 && \text{in } \mathbb{R}^d \times]0,T[, \\
& v(x,T) = G(x, m(T)) \quad m(\cdot,0) = m_0(\cdot)K && \text{for } x \in \mathbb{R}^d
\end{aligned} \tag{1}$$

where $m(\cdot,t)$ is a probability measures over $\mathbb{R}^d$ having finite first order moment, $\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times r}$ and F, $G : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}$ are two functions satisfying some assumptions. Up to the best of our knowledge, for this system, existence and uniqueness results have not been established yet (except for the case $r = d$, $\sigma := \hat{\sigma}\mathbb{I}_{d\times d}$, $\hat{\sigma} \in \mathbb{R}$).

Numerical methods to solve MFGs problems have been addressed by several authors. We refer the reader to [1, 4, 6, 8] for the analysis in the non–degenerated second order case and to [2, 3] for the first order case.

Our main contribution, described in [5], is to provide a fully–discrete Semi–Lagrangian discretization of (1), to study the main properties of the scheme and to establish a convergence result. The main advantage of this approach is to get an explicit and conservative scheme, which allows for large time steps even when $\sigma(t)\sigma(t)^\top$ is degenerated. We stress the fact that, if for second order HJB equations Semi–Lagrangian schemes have already been analyzed, the proposed approximation of the FP equation is new.

[1] *Y. Achdou and F. Camilli and I. Capuzzo Dolcetta*, Mean field games: Numerical methods for the planning problem, SIAM J. of Control & Optimization,50, (2012),pp. 79–109.

[2] *F. Camilli and F. J. Silva*, A semi–discrete in time approximation for a first order–finite mean field game problem, Network and Heterogeneous Media, 7–2, (2012), pp. 263–277.

[3] *E. Carlini and F. J. Silva*, A Fully Discrete Semi–Lagrangian Scheme for a First Order Mean Field Game Problem, SIAM J. Numer. Anal. 52–1 (2014), pp. 45–67.

[4] *E. Carlini and F. J. Silva*, Semi–Lagrangian schemes for mean field game models, 52nd IEEE Conference on Decision and Control December 10–13, 2013. Florence, Italy.

[5] *E. Carlini and F. J. Silva*, A Fully Discrete Semi–Lagrangian Scheme for a Second Order Mean Field Game Problem, to appear in DCDS–A, "Optimal control problems and related fields".

[6] *O. Guéant*, Mean field games equations with quadratic Hamiltonian: a specific approach, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 22, (2012)

[7] *M. Huang and P.E. Caines and R.P. Malhamé*, Large populations stochastic dynamics games: closed–loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainly equivalence principle, Comm. Inf. Syst., 6, (2006), pp. 221–251

[8] *A. Lachapelle and J. Salomon and G. Turinici*, Computation of mean field equilibria in economics, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 20–4, (2010), pp. 567–588.

[9] *J.-M. Lasry and P.-L. Lions*, Jeux à champ moyen I. Le cas stationnaire, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 343 (2006),pp. 619–625

On optimal state of exploited population with asymmetric intraspecific competition

A. A. Davydov
Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: davydov@vlsu.ru

Amer Fadhel Nassar
Vladimir, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
e-mail: amer6767@mail.ru

The population dynamic is described by the equation

$$\frac{\partial x(t,l)}{\partial t}+\frac{\partial\big(g(l,E(t,l))x(t,l)\big)}{\partial l}=-\big(\mu(l,E(t,l))+u(l)\big)x(t,l).$$

Here $x(t,l)$ is the density of individuals of size l at the moment t; g and μ are growth and death rates, respectively; u stays for an exploitation intensity. The equation is essentially nonlinear because the competition exponent E is a function on x. We assume that the population has asymmetric competition of hierarchical type, namely, the individuals of bigger size have influence on the smaller one but not viceversa. By $u=0$ the equation of population dynamic is like in [1], [2].

The competition function E we take in the form

$$E(t,l)=\int_l^L \chi(l)x(t,l)dl.$$

where χ is a nonnegative positive integrable function on the interval $[0,L], L>0$, which is the interval of sizes where the population is managed and exploited.

The inflow of new individuals

$$x(t,0)=\int\limits_0^L r(l,E(t,l))x^{\beta}(t,l)dl+p(t),$$

defines the boundary condition. Here r characterizes the birth rate and is a non–negative continuous function, and $\beta\in(0,1)$ reflects the nonlinear dependence of reproduction ability on the density of individuals. The density p stays for the industrial renewal of the population.

The considered model is essentially different from the ones studied in papers [3] and [4] due to competition form. Here this form is asymmetric in contrast with the symmetric one in the papers. The functions g, μ, r satisfy natural conditions like in these papers. For example, for any given l the growth and birth rates g and r are non–increasing functions on the level E of competition, and the mortality rate μ is non–decreasing.

Theorem 1. *For given constant planting $p(t) = p_0, 0 \le p_0 < \infty$ there exists a measurable exploitation intensity which provides the maximum profit from the population exploitation in stationary mode.*

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 14-50-00005 and performed in Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

[1] *Calsina A., Saldana J.* Asymptotic behaviour of a model of hierarchically structured population dynamic. In: J.Math. Biol. 1997. Vol. 35, pp. 967-987.

[2] *Murphy L. F.* A nonlinear growth mechanism in size structured population dynamics. In: J. Theor. Biol. 1983. Vol. 104, pp. 493–506.

[3] *Davydov A. A., Platov A. S.* Optimal Stationary Solution in Forest Management Model by Accounting Intra–Species Competition. In: Moscow Math. Journal. 2012. Vol. 12, No. 2. pp. 269–273

[4] *Davydov A. A., Platov A. S.* Optimization of size–structured population with interacting species. In: Journal of Mathematical Sciences. January 2013, Vol. 188, No. 3, pp. 293–298.

Weakly Monotone Solutions of the Hamilton–Jacobi Inequality and Feedback Minimum Principle

V. A. Dykhta
Irkutsk, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS
e-mail: dykhta@gmail.com

The talk is devoted to necessary optimality conditions for the optimal control problem (P):

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$J[x,u] = l(x(t_1)) \to \min .$$

Here, U is a given compact set. The function f is assumed to be continuous, locally Lipschitzian in x, and such that (s.t.) the set of all admissible trajectories of the control system is relatively compact in $C(T, R^n)$. The cost function l is locally Lipschitz continuous (for simplicity, below we assume that l belongs to the class $C^2(R^n)$).

Though problem (P) is stated within the conventional class $\mathcal{U} = L_\infty(T,U)$ of open–loop controls, the discussed optimality conditions are formulated in terms of feedback controls, which are arbitrary single–valued functions $v : T \times R^n \to U$. As concepts of a solution to (1) under a feedback control v we employ both Carathéodory solution concept, and Krasovskii–Subbotin constructive motions. Let $\mathcal{X}(v)$ denote the union of all solutions of these types. A control v is said to be a *descent control* (with respect to the functional J) at an admissible point $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ if there exists $x \in \mathcal{X}(v)$ s.t. $l(x(t_1)) < J[\bar{\sigma}]$. Clearly, optimality of $\bar{\sigma}$ in (P) implies the absence of descent controls at $\bar{\sigma}$.

In the considered optimality conditions, feedback controls, which are expected to be descent at a reference point $\bar{\sigma}$, are designed by means of an extremal aiming with an arbitrary support majorant of the functional J at $\bar{\sigma}$ (i.e., with a weakly decreasing solution $\varphi(t,x)$ of the respective Hamilton–Jacobi inequality with a certain boundary condition). In the simplest case, support majorants are defined by solutions of the adjoint system, while the respective optimality conditions provide a straightforward strengthening of the Maximum Principle. Below, we formulate such a strengthening for a nonsmooth problem (P).

Let $\Psi(\bar{\sigma})$ denote the set of all solutions to the Clarke adjoint inclusion:

$$
\begin{gathered}
-\dot{\psi}(t) \in \partial_x[\psi(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))], \quad \psi(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1)), \\
p(t,x) := \psi(t) + l_x(x) - l_x(\bar{x}(t)), \quad \psi \in \Psi(\bar{\sigma}), \\
U_\psi(t,x) := \operatorname*{Argmin}_{u \in U} p(t,x) \cdot f(t,x,u),
\end{gathered}
$$

and let $\mathcal{V}_\psi$ denote the set of all selections of the multifunction $U_\psi(t,x)$.

Theorem. *(Feedback Minimum Principle) Assume that a process $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ is optimal in problem (P). Then there exists $\psi \in \Psi(\bar{\sigma})$ s.t. the trajectory $\bar{x}$ is optimal in the following extremal problem:*

$$
l(x(t_1)) \to \min; \quad x \in \bigcup_{v \in \mathcal{V}_\psi} \mathcal{X}(v). \tag{2}
$$

Clarke‘s nonsmooth Maximum Principle follows from this theorem, namely, from the condition of existence of $\bar{\psi} \in \Psi(\bar{\sigma})$ s.t. the trajectory $\bar{x}$ is admissible in auxiliary problem (2). Note that, the proposed optimality condition is of a variational type, since it is formulated in terms of the auxiliary infinite-dimensional extremal problem. Moreover, generalization of this theorem to the problems with cost function l belonging to the class of nonsmooth DC-functions is of variation types as well. In the modern Hamilton–Jacobi Theory, these results are the first necessary conditions, which are comparable in efficiency with the Maximum Principle.

The work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project No. 14-01-00690.

On one application of convex optimization to stability of linear switched systems

V. Dzhafarov (Cafer), **T. Büyükköroğlu**, **Ş. Yılmaz**

Department of Mathematics, Faculty of Science, Anadolu University, Eskisehir 26470, Turkey

e-mail: vcaferov@anadolu.edu.tr, tbuyukkoroglu@anadolu.edu.tr, serifeyilmaz@anadolu.edu.tr

In this report we consider the problem of existence and evaluation of a common Lyapunov function $V(x) = x^T Px$ for the switched system $\dot{x} = Ax, \quad A \in \{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ where $x \in \mathbb{R}^n$, $P > 0$. In the first part of the report we consider weighted quadratic functions which are based on the convexity property of the maximum eigenvalue function of symmetric matrices. In this case some weighted convex sums of matrices $P_i > 0$ may be a common solution despite none of them is not a common solution. In the second part we give a fast algorithm for a common P for a switched system consisting of two matrices. Differently from known algorithm where optimization has been done over P, we consider an optimization over the right–hand side of the Lyapunov equation $A^T P + PA = -Q$. Such approach essentially improves the convergence rate.

[1] *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Birkhäuser, Boston, 2003.

[2] *Liberzon D., Tempo R.* Common Lyapunov functions and gradient algorithms. In: IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. Vol. 49, pp. 990-994.

[3] *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[4] *Narendra K.S., Balakrishnan J.A.* A common Lyapunov function for stable lti systems with commuting A-matrices. In: IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 12, pp. 2469-2471.

[5] *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. In: IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. Vol. 54, No. 2, pp. 308-322.

Linear–quadratic pursuit–evasion game with terminal constraint for the evader

Valery Y. Glizer and Vladimir Turetsky
Department of Mathematics, Ort Braude College of Engineering, Karmiel, Israel
e-mail: valery48@braude.ac.il, turetsky1@braude.ac.il

Interception problems have been considered in the literature in various settings. If the target (evader) behaviour is predictable by the interceptor (pursuer), this problem can be formulated in the framework of optimal control theory (see, e.g., [1–3] and references therein). If the evader's behavior is unpredictable for the pursuer, the interception problem can be formulated as a robust control problem [4], or, in particular, as a finite horizon linear pursuit–evasion differential game (see e.g., [1, 5–7] and references therein). The objective of the pursuer is to *capture* the evader, i.e. to nullify the miss distance (the closest separation between the vehicles), while the evader tries to avoid the capture.

However, in a practical situation, avoiding the capture is not the main aim of the evader. Its actual aim is to hit a prescribed object, while avoiding the capture is an auxiliary aim (see, e.g., [8] and references therein). Thus following [8], the evader can classified as the *attacker* "A", the pursuer — as the *defender* "D" and the attacked object — as the *target* "T".

Due to [8], the normalized dynamics model of the planar engagement with a first–order dynamics defender and an ideal attacker is

$$\frac{dz}{d\vartheta} = \mu\psi(\vartheta)u - \vartheta v, \quad z(\vartheta_0) = z_0, \tag{1}$$

$$\frac{dw}{d\vartheta} = -(\vartheta_c + \vartheta)v, \quad w(\vartheta_0) = w_0, \tag{2}$$

where $z(\vartheta)$ and $w(\vartheta)$ are the normalized zero–effort miss distances in the "D" against "A" and "A" against "T" engagements, respectively; $\vartheta \in [0, \vartheta_0]$ is the normalized time–to–go; the controls u and v are the normalized lateral acceleration commands of "D" and "A", respectively; μ is the maneuverability ratio between "D" and "A"; $\psi(\vartheta) = \exp(-\vartheta)+\vartheta-1$, ϑ_c is the normalized time needed for "A" to reach "T" after the possible interception.

Since the attacker tries not only to escape the defender, but also to hit the target, it should be able to reach "T" after the interception moment. This is described by the terminal state constraint

$$|w(0)| \leq \vartheta_c^2/2. \tag{3}$$

In [8], for the dynamics (1)–(2) and the constraint (3), the differential game with bounded controls and the cost functional $J = |z(0)|$ was solved.

In this presentation, the hard control constraints are replaced by soft ones, thus yielding the differential game with the dynamics (1)–(2), the constraint (3) and the cost functional

$$J = z(0)^2 + \alpha \int\limits_0^{\vartheta_0} u^2(\vartheta) d\vartheta - \beta \int\limits_0^{\vartheta_0} v^2(\vartheta) d\vartheta, \tag{4}$$

where $\alpha, \beta > 0$ are the control penalty coefficients.

The solution of the game (1)–(4) is derived. The solution properties for $\alpha, \beta \to 0$ are analyzed.

Список литературы

[1] A. Bryson and Y. Ho, *Applied Optimal Control.* New York, NY: Hemisphere, 1975.

[2] M. Guelman and J. Shinar, "Optimal guidance law in the plane," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 7, 1984.

[3] V. Y. Glizer, "Optimal planar interception with fixed end conditions: approximate solutions," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 93, pp. 1 – 25, 1997.

[4] V. Y. Glizer and V. Turetsky, *Robust Controllability of Linear Systems.* New York, NY: Nova Science Publishers Inc., 2012.

[5] R. Isaacs, *Differential Games.* New York: John Wiley, 1965.

[6] N. Krasovskii and A. Subbotin, *Game-Theoretical Control Problems.* New York, NY: Springer Verlag, 1988.

[7] J. Shinar, V. Y. Glizer, and V. Turetsky, "The effect of pursuer dynamics on the value of linear pursuit-evasion games with bounded controls," in *Advances in Dynamic Games - Theory, Applications, and Numerical Methods*, ser. Annals of the International Society of Dynamic Games, V. Krivan and G. Zaccour, Eds. Basel: Birkhauser, 2013, vol. 13, pp. 313 – 350.

[8] Y. Lipman and J. Shinar, "A linear pursuit-evasion game with a state constraint for a highly maneuverable evader," in *New Trends in Dynamic Games and Applications*, ser. Annals of the International Society of Dynamic Games, G. J. Olsder, Ed. Boston: Birkhauser, 1995, vol. 3, pp. 143 – 164.

Approximation of the set of trajectories of the control system with integral constraint on the controls and described by a Urysohn type integral equation

N. Huseyin, **A. Huseyin**, **Kh. G. Guseinov**

Anadolu University, Mathematics Department, Eskisehir 26470, Turkey

e-mail: nhuseyin@anadolu.edu.tr, ahuseyin@anadolu.edu.tr, kguseynov@anadolu.edu.tr

Integral constraint on the controls is inevitable, if the control resource is exhausted by consumption, such as fuel, finance, food and energy (see, e.g. [1], [2], [3]). For example the mathematical model of the flying object with variable mass is described as control system with integral constraint on the controls (see, [1]). Integral equations arise in various problems of mechanics, physics, economy, biology and medicine.

Control system described by a Urysohn type integral equation is considered. It is assumed that the system is nonlinear with respect to the phase vector and it is affine with respect to the control vector. The closed ball of the space L_p, $p > 1$, centered at the origin is chosen as the set of admissible control functions. Approximation of the set of trajectories of the system generated by all admissible control functions is studied. The set of admissible control functions is replaced by the set which consists of a finite number of control functions and generates a finite number of trajectories. The Hausdorff distance between the set of trajectories of the system and the set consisting of a finite number of trajectories is evaluated.

[1] *Krasovskii N.N.* Theory of control of motion: Linear systems. Nauka, Moscow, 1968. (In Russian)

[2] *Subbotin A.I., Ushakov V.N.* Alternative for an encounter-evasion differential game with integral constraints on the players controls. In: J. Appl. Math. Mech. 1975. Vol. 39, No. 3, pp. 367-375.

[3] *Subbotina N.N., Subbotin A.I.* Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players controls. In: J. Appl. Math. Mech. 1975. Vol.39, No.3, pp. 376–385.

An efficient filtered scheme for some first order Hamilton–Jacobi–Bellman equations

S. Sahu, **M. Falcone**

Dipartmento di Matematica, SAPIENZA - Università di Roma, Rome, Italy.

e-mail: sahu@mat.uniroma1.it , falcone@mat.uniroma1.it

O. Bokanowski

LJLL, Universitè Paris Diderot (P7)Paris, France.

e-mail: boka@math.jussieu.fr

We introduce a new class of "filtered" schemes for some first order non-linear Hamilton–Jacobi–Bellman equations of following form

$$\partial_t v + H(x, \nabla v) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \tag{1}$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

with the following classical assumptions on initial data v_0 and H are Lipschitz continuous function. It is well known that, in the one dimensional case, there is a strong link between Hamilton–Jacobi equations and scalar conservation laws. Namely, the viscosity solution of the evolutive HJ equation is the primitive of the entropy solution of the corresponding hyperbolic conservation law with the same hamiltonian.

There are several schemes developed for hyperbolic conservation law. Most of the numerical ideas to solve hyperbolic conservation law can be extended to HJ equations. Well known high-order essentially non-oscillatory (ENO) scheme have been introduced by A. Harten et al. in [4] for hyperbolic conservation laws, and then extended to HJ equation by Osher and Shu [1]. ENO schemes have shown to have high-order accuracy although a precise convergence result is still missing and, for this property, they have been quite successful in many applications. Despite the fact that there is no convergence proof of ENO schemes towards the viscosity solution of (1) in the general case, convergence results may hold for related schemes, e.g. MUSCL schemes, as it has been proved by Lions and Souganidis in [2]. Convergence results of some non monotone scheme have also been shown in particular cases [3]. The work follows recent ideas of Froese and Oberman [6]. The proposed schemes are not monotone but still satisfy some ϵ-monotone property. Convergence results and precise error estimates are given, of the order of $\sqrt{\Delta x}$ where Δx is the mesh size. The framework allows to construct finite difference discretizations that are easy to implement, high-order in the domains where the solution is smooth, and provably convergent, together with error estimates. Numerical tests on several examples are given [5] to validate the approach, also showing how the filtered technique can be applied to stabilize an otherwise unstable high–order scheme.

The work was supported by AFOSR Grant no. FA9550-10-1-0029, and by the EU under the 7th Framework Programme Marie Curie Initial Training Network "FP7-PEOPLE-2010-ITN", SADCO project, GA number 264735-SADCO

[1] *S. Osher,cand C-W Shu*, High order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton–Jacobi equations, SIAM J. Numer. Anal 4 991 907-922.

[2] *P.-L. Lions, and P.E. Souganidis*, Convergence of MUSCL and filtered schemes for scalar conservation laws and Hamilton–Jacobi equations, Numer. Math, 69, 1985, 441–470

[3] *O. Bokanowski, H. Zidani* Convergence of a non-monotone scheme for Hamilton–Jacobi–Bellman equations with discontinuous, 115, 2010, 1-44. initial data

[4] *A.Harten, and B. Engquist, and S. Osher, and S. R. Chakravarty*, Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, J. Comput. phys., 4, 1987, 231-303.

[5] *O. Bokanowski, M. Falcone, and S. Sahu.* An efficient filtered scheme for some first order Hamilton–Jacobi–Bellman equations submitted in SIAM Journal on Scientific Computing (preprint (https://hal.inria.fr/hal-01094261) .

[6] *B. D. Froese , A. M. Oberman* Convergent filtered schemes for the Monge-Amp'ere partial differential. SIAM J. Numer. Anal., 512-2013 423-444.

Feedback Necessary Optimality Condition for Impulsive Control Problems

M. V. Staritsyn, **S. P. Sorokin**

Irkutsk, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS

e-mail: starmaxmath@gmail.com, sorsp@mail.ru

We study a variational problem

$$I = F(x(T)) \to \min \tag{1}$$

for dynamical systems, whose state evolution on a given time interval $[0, T]$, $T < \infty$, is described by a nonlinear measure differential equation:

$$dx = f(x, u)\, dt + g(x, u)\, \vartheta(dt), \quad x(0^-) = x_0, \tag{2}$$

$$u \in U, \tag{3}$$

$$|\vartheta|([0, T]) \le M. \tag{4}$$

Here, F is a C^2-function; f and g are vector functions with certain natural regularity properties (Lipschitz continuity and sublinear growth wrt x, Borel measurability wrt u); $x_0 \in \mathbb{R}^n$ is a given initial position, $x(t^-)$ denotes the left one-sided limit of a function x at a point $t \in [0, T]$ (in the paper we will deal with right-continuous vector functions of bounded variation as trajectories). The dynamical system is controlled in two ways: $u :\ [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$ is a "usual" control, i.e. measurable function subject to a geometrical constraint (3) with a given compact U, while ϑ is an impulsive control in the sense [1], which for the time being can be thought of as a signed scalar-valued Borel measure $\mu \in C^*([0, T], \mathbb{R})$, whose total variation $|\mu|$ is majorated by a nonnegative scalar measure $|\vartheta|$. The latter is subject to energetic constraint (4), where M is a given positive constant, which makes sense of a total "resource" of impulsive actions.

The main issue of the study is a nonlocal necessary optimality condition, which employs impulsive feedbacks [2]. We adapt the approach [3–5] based on the so-called "method of supporting majorants". This general approach consists in applying functional-descent feedback controls generated by weakly monotone solutions of Hamilton–Jacobi inequality under a certain boundary condition. Our necessary optimality condition is shown to strengthen the Maximum Principle [6], even for state-linear problems of impulsive control with trajectories of bounded variation.

As an application of the obtained optimality condition, we develop a conceptual scheme of a nonlocal numerical algorithm for optimal impulsive control.

The work was partially supported by Russian Foundation for Basic Research, projects nos 14-01-00699, 13-08-00441.

[1] *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L.* On constrained impulsive control problems. In: J. Math. Sci. 2010. Vol. 165, No. 6, pp. 654-688.

[2] *Fraga S.L., Pereira F.L.* Hamilton–Jacobi–Bellman equation and feedback synthesis for impulsive control. In: IEEE Transactions on Automatic Control. 2012. Vol. 57, No. 1, pp. 244–249.

[3] *Dykhta V.A.* Weakly Monotone and Generating L-functions in Optimal Control. In: Proc. X Int. Chetaev Conf. "Analytic Mechanical, Stability, and Control", June 12–16, 2012, Kazan. Kazan. Gos. Tekh. Univ., 2012. Vol. 3, section 3, Control, part I, pp. 408–420.

[4] *Dykhta V.A.* Weakly Monotone Solutions of the Hamilton–Jacobi Inequality and Optimality Conditions with Positional Controls. In: Autom. Remote Control. 2014. Vol. 75, No. 5, pp. 829–844.

[5] *Dykhta V.A.* Variational Optimality Conditions with Feedback Descent Controls that Strengthen the Maximum Principle. In: IIGU Ser. Matematika. 2014. Vol. 8, pp. 86–103

[6] *Miller B., Rubinovich E.* Impulsive Control in Continuous and Discrete Continuous Systems. Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 2001.

Список авторов

List of authors

Научное издание

Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби

Тезисы докладов II Международного семинара, посвященного 70-летию со дня рождения академика А. И. Субботина

Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института математики и механики УрО РАН

Ответственный за выпуск *Т. Б. Токманцев*

Подписано в печать 21.03.2015. Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 10. Тираж 120 экз. Заказ 5297.

ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук.
620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

ФГАОУ ВПО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина».
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д. 19.

Отпечатано ООО «Издательство УМЦ УПИ».
620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, д. 35а, оф. 2.